文章编号:1672-058X(2012)07-0023-05

带有变指标反应项的非线性抛物方程解的爆破性质*

唐树乔[1,2], 郭 彦[2,3], 宋士勤[1]
(1. 亳州师范高等专科学校 理化系,安徽 亳州 236800;2. 东南大学 数学系,南京 211100;
3. 南京财经大学 应用数学学院,南京 210046)

摘 要:主要研究了 Cauchy 问题:$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{p(x)} + u^q + ku, (x,t) \in R^N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in R^N \end{cases}$ 的非负解的爆破性质,其中 $0 < p_- = \inf\limits_x p(x) \leqslant p(x) \leqslant \sup\limits_x p(x) = p_+$ 是非负连续有界函数,$0 < k < \lambda$(λ 是 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值);证明了当 $\max\{p_+, q\} > 1$ 且初值 $u_0(x)$ 充分大时,解 $u(x,t)$ 在有限时刻爆破;当 $\max\{p_+, q\} \leqslant 1$ 时,解 $u(x,t)$ 对任意初值 $u_0(x)$ 整体存在;在第 4 部分,讨论了方程的 Fujita 指标,并给出了解对任意初值爆破的几种情形.

关键词:Fujita 指标;变指标;非线性抛物方程;整体存在;爆破
中图分类号:O175.26 **文献标志码**:A

1 概 述

非线性抛物方程是偏微分方程研究的一个重要方面,它在生物学、生态学、生物化学及物理、工程等传统学科领域中得到了很广泛的应用. 如今,为了解决复杂的非线性问题,人们运用了各种现代数学工具. 然而,在研究中发现,对非线性问题的研究不存在一劳永逸的统一工具和方法;非线性问题的极端复杂性,直接反映了自然现象的极端复杂性.

在此主要研究一类带有变指标反应项的非线性抛物方程的非负解的整体存在和有限时刻爆破性质. 关于抛物方程的 blow-up 现象的研究由来已久,开创性的工作是在 1966 年 Fujita 对非线性抛物方程 $u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + u^q(x,t)$ 的爆破临界指标的研究. 在文献[1]中 Fujita 证明了当 $1 < q < 1 + \frac{2}{N}$ 时,解 $u(x,t)$ 对任意非平凡初值都发生有限时刻爆破;当 $q > 1 + \frac{2}{N}$ 时,解 $u(x,t)$ 对小初值整体存在,对大初值有限时刻爆破. 而对于 $q = 1 + \frac{2}{N}$ 的临界情形,几位作者也给了答案[2-5]. 1990 年,Meier 在文献[6]中研究了初边值问题:

收稿日期:2012-02-21;修回日期:2012-03-10.
* 基金项目:安徽省自然科学基金(KJ2011Z258);江苏省基础研究计划自然科学基金(BK2010404).
作者简介:唐树乔(1973-),男,安徽亳州人,讲师,从事非线性偏微分方程(组)理论及其应用研究.

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + u^p(x,t), x \in \Omega, t > 0 \\ u(x,t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{1}$$

对非线性抛物方程解的整体存在和有限时刻爆破问题越来越感兴趣. 最近,R. FERREIRA 、J. D. Rossi 等人在文献[7]中研究了带有变指标反应项的非线性抛物方程:

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \Delta u(x,t) + u^{p(x)}(x,t), (x,t) \in R^N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in R^N \end{cases} \tag{2}$$

从式(2)得到了解的整体存在和爆破的一些结论. 主要考虑以下带有变指标反应项和固定指标反应项混合的非线性抛物方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{p(x)} + u^q + ku, (x,t) \in R^N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in R^N \end{cases} \tag{3}$$

式(3)的临界 Fujita 爆破指标,其中 $0<k<\lambda$(λ 是 $-\Delta$ 带有齐次 Dirichlet 边界条件的第一特征值),$u_0(x)$ 和 $p(x)$ 都是非负连续有界函数.

$$p_- = \inf_x p(x), \quad p_+ = \sup_x p(x)$$

在此主要是运用方程解的积分表示、上下解方法和比较原理去研究上述问题解的整体存在和有限时刻爆破条件.

2 预备知识

定义 2.1 如果存在常数 $T(0<T<\infty)$,使得式(3)的解 $u(x,t)$ 在 $R^N \times [0,T)$ 上存在,并且有 $\limsup\limits_{t\to T^-} \max\limits_{x\in R^N} |u(x,t)| = \infty$,那么称方程的解 $u(x,t)$ 在有限时刻 T 爆破[8].

定义 2.2 如果式(3)的解 $u(x,t)$ 在 $R^N \times [0,\infty)$ 上存在,那么称方程的解 $u(x,t)$ 整体存在.

引理 2.1 设 $f(t)$ 为连续可导函数且满足不等式:

$$f'(t) \geqslant -mf(t) + nf^p(t)$$

其中常数 $p>1, m, n>0$. 若 $f(0)>0, -mf(0)+nf^p(0)>0$,则 $f(t)$ 爆破.

定义 2.3 假设 $\bar{u}(x,t) \in C^{2,1}(R^N \times (0,T)) \cap C(R^N)$,若满足

$$\begin{cases} \bar{u}_t - \Delta \bar{u} - \bar{u}^{p(x)} - \bar{u}^q - k\bar{u} \geqslant 0, (x,t) \in R^N \times (0,T) \\ \bar{u}(x,0) - u_0(x) \geqslant 0, x \in R^N \end{cases}$$

则称 $\bar{u}(x,t)$ 是式(3)的上解. 同样的方法可以定义式(3)的下解.

引理 2.2(Jensen's 不等式) 设 $p>1$,函数 $\varphi(x)$ 满足

$$\int_{R^N} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

则对于任意的非负函数 $u(x)$ 满足不等式:

$$\int_{R^N} u^p(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_{R^N} u(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x\right)^p$$

下面不加证明地给出一个重要引理和它的推论.

引理 2.3 设 μ 是区域 $B \subset R^N$ 的正测度,并且满足 $\int_B d\mu = 1$. 如果 $f \in L^\gamma(B, \mathrm{d}\mu)$,且对任意的 $x \in B$,有

$1 \leqslant \delta \leqslant p(x) \leqslant \gamma$,那么存在常数 c,使得 $\int_B |f|^{p(x)} \mathrm{d}\mu \geqslant c\min\{(\int_B |f| \mathrm{d}\mu)^{\delta}, (\int_B |f| \mathrm{d}\mu)^{\gamma}\}$.

推论　在引理 2.3 的条件下,有

$$\int_B |f|^{p(x)} \mathrm{d}\mu \geqslant c\min\{(\int_B |f| \mathrm{d}\mu)^{\delta}, (\int_B |f|^{\delta} \mathrm{d}\mu)^{\frac{\gamma}{\delta}}\}$$

$$\int_B |f| \mathrm{d}\mu \geqslant 1 \Rightarrow \int_B |f|^{p(x)} \mathrm{d}\mu \geqslant c(\int_B |f| \mathrm{d}\mu)^{\delta}$$

3　解的爆破和整体存在

在以下部分中,将看到变指标 $p(x)$ 和固定指标 q 相互作用对爆破指标的影响.

定理 3.1　关于式(3)爆破指标的讨论有以下命题.

(1) 如果 $\max\{p_+, q\} > 1$,那么式(3)的解对大初值爆破;

(2) 如果 $\max\{p_+, q\} \leqslant 1$,那么式(3)的解对任意初值整体存在.

证明　(1) 当 $\max\{p_+, q\} > 1$ 时, 存在球 $B \subset R^N$ 使得 $\max\{p_-(B), q\} \geqslant \delta > 1$, 其中 $p_-(B) = \inf\limits_{x\in B} p(x)$. 又 λ 是方程$\begin{cases} -\Delta w(x) = \lambda w(x), x \in B \\ w(x) = 0, x \in \partial B \end{cases}$的第一特征值,设 $w(x)$ 是相应的特征向量,并且规范化为$\int_B w(x) \mathrm{d}x = 1$.

式(3)的两边同乘以 w:

$$u_t w = w\Delta u + u^{p(x)} w + u^q w + kuw$$

$$\int_B u_t w \mathrm{d}x = \int_B w\Delta u \mathrm{d}x + \int_B u^{p(x)} w \mathrm{d}x + \int_B u^q w \mathrm{d}x + k\int_B uw \mathrm{d}x$$

$$\frac{d\int_\Omega uw\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \int_B w\Delta u \mathrm{d}x + \int_B u^{p(x)} w \mathrm{d}x + \int_B u^q w \mathrm{d}x + k\int_B uw \mathrm{d}x =$$

$$-(\lambda - k)\int_B uw \mathrm{d}x + \int_B u^{p(x)} w \mathrm{d}x + \int_B u^q w \mathrm{d}x$$

记 $y(t) = \int_B uw \mathrm{d}x$,则由 Jensen’s 不等式及引理 2.3 的推论可知,只要$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant 1$ 就有

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \geqslant -(\lambda - k)y(t) + cy^{\delta}(t)$$

其中 c 为常数. 这表明当式(3) 的初值充分大时, 即 $y(0) = \int_B u_0(x) w(x) \mathrm{d}x$ 充分大时, 也就是当 $y(0) \geqslant \max\{1, (2^{\delta}(\lambda - k))^{\frac{1}{\delta-1}}\}$ 时,由引理 2.1 可知式(3) 的解在有限时刻爆破.

(2) 当 $\max\{p_+, q\} \leqslant 1$ 时,构造函数:

$$v(x,t) = (\| u_0 \|_\infty + 1) \mathrm{e}^{(k+2)t}$$

则

$$v_t = (k+2)(\| u_0 \|_\infty + 1)\mathrm{e}^{(k+2)t} \geqslant$$

$$(\| u_0 \|_\infty + 1)^{p(x)} \mathrm{e}^{(k+2)tp(x)} + (\| u_0 \|_\infty + 1)^q \mathrm{e}^{(k+2)tq} + k(\| u_0 \|_\infty + 1)\mathrm{e}^{(k+2)t} = \Delta v + v^{p(x)} + v^q + kv$$

并且 $v(x,0) = \| u_0 \|_\infty + 1 \geqslant u_0$. 从而 $v(t)$ 为式(3)的上解,所以式(3)的解整体存在.

4 变指标对 Fujita 指标的影响

在解爆破(即 $\max\{p_+,q\}>1$)的前提下,得到以下结果.

定理4.1 (1) 若 $1<q\leqslant 1+\frac{2}{N}$,则式(3)的解对任意初值爆破.

(2) 若 $q>1+\frac{2}{N}$ 且 $0<p_-\leqslant p_+\leqslant 1+\frac{2}{N}$,则式(3)的解对任意初值爆破.

证明 当 $1<q\leqslant 1+\frac{2}{N}$ 时,考虑式(3)的下解 $u(x,t)$ 满足:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^q, (x,t) \in R^N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in R^N \end{cases} \tag{4}$$

由文献[9]可以知道式(4)的解是对于任意初值爆破,所以式(3)的解对任意初值爆破.

(3) 因为 $u(x,t)$ 是非负解并且 $p(x)\leqslant 1+\frac{2}{N}$,$q>1+\frac{2}{N}$,所以 $u^{p(x)}+u^q+ku\geqslant u^{1+\frac{2}{N}}$,从而方程:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{1+\frac{2}{N}}, (x,t) \in R^N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in R^N \end{cases} \tag{5}$$

的解是式(3)的下解,由文献[8]可知式(5)的解在有限时刻爆破. 故式(3)的解爆破.

接下来再给出在 $p_-<1+\frac{2}{N}<p_+$ 的情况下任意解爆破的一个例子.

例1 (解对任意初值爆破)取函数 $p(x)=p_-\in(1,2)$, $\forall x\geqslant 0$.

构造式(3)在有限时刻爆破的一个下解. 首先注意到对于所有的 $t>0$ 解 u 总是正的,所以可以找到一个非平凡函数 $v_0(x)\leqslant u(x,t_0)$ 并且 $v_0(0)=0$.

考虑下列问题:

$$\begin{cases} v_t = v_{xx} + v^{p_-}, (x,t) \in R^+ \times (0,T_1) \\ v(x,0) = v_0(x), x \in R^+ \\ v(0,t) = 0, t \in (0,T_1) \end{cases} \tag{6}$$

则 u 是式(6)的一个上解. 另一方面,由文献[9]可知,式(6)的爆破指标和 Fujita 指标分别是 $p_b=1$,$p_f=2$,所以 u 对任意初值爆破.

5 结 语

对于文献[7]中所讨论的方程,对变指标反应项的处理还是相当复杂的,而在此讨论中,变指标 $p(x)$ 和固定指标 q 相互作用,使得增加了爆破的情形. 在研究的基础上,可以进一步尝试研究方程组的情况.

参考文献:

[1] FUJITA H. On the blowing up solutions of the cauchy problem for $u_t=\Delta u+u^{1+\alpha}$[J]. J Fac Sci Univ Tokyo Sect A,1966,16:105-113

[2] ARONSON D, WEINBERGER H. Multidimensional nonlinear diffusion arising in population genetics[J]. Advances in Math, 1978,30:33-76

[3] HAYAKAWA K. On nonexistence of global solutions of some semilinear parabolic equations[J]. Proc Japan Acad,1963,49:503-525
[4] KOBAYASHI K, SIARO T, TANAKA H. On the blowing up problem for semilinear heat equations[J]. J Math Soc Japen, 1977,29:407-424
[5] WEISSLER F. Existence and nonexistence of global solutions for semilinear heat equation[J]. Israel J Math,1981,38:29-40
[6] WEIER P. On the critical exponent for reaction-diffusion equations[J]. Arch Rational Mech,1990,109:63-71
[7] 刘其林,邓卫兵,谢春红. 一类退化抛物方程解的存在唯一性和爆破速率[J]. 数学学报,2003,(6):775-784
[8] WEISSLER F. An L^{∞} blow-up estimate for a nonlinear heat equation[J]. Comm Pure Appl,Math. 1985,38:292-295
[9] MIZOGUCHI N, YANAGIDA E. Critical exponents for the blowup of solutions with sign changes in a semilinear parabolic equation. II[J]. J Differential Equations,1998,145:295-331

Blow-up Properties of Solutions to a Nonlinear Parabolic Equations with Variable Index Reaction Term

TANG Shu-qiao[1,2], **GUO Yan**[2,3], **SONG Shi-qin**[1]

(1. Department of Physics and Chemistry, Bozhou Teachers College, Anhui Bozhou 236800, China;
2. Department of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211100, China;
3. Applied Mathematics Institute, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210046, China)

Abstract: In this paper, we study the blow-up properties for nonnegative solutions to the following Cauchy problem:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^{p(x)} + u^q + ku, (x,t) \in R^N \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), x \in R^N, \end{cases}$$

here $0 < p_- = \inf_x p(x) \leqslant p(x) \leqslant \sup_x p(x) = p_+$ is a nonnegative continuous bounded function and $0 < k < \lambda$ (where λ is the first eigenvalue of $-\Delta$ with homogeneous Dirichlet boundary condition). We prove that there are solutions $u(x,t)$ with blow-up in finite time if and only if $\max\{p_+, q\} > 1$ and when initial value $u_0(x)$ is sufficiently big. when $\max\{p_+, q\} \leqslant 1$, the solution $u(x,t)$ shows blow-up properties in finite time to any initial value.

In Section 4, we discuss Fujita indicators of this equation and give several conditions for the solutions blow-up with any initial value.

Key words: Fujita index; variable index; nonlinear parabolic equation; global existence; blow-up

责任编辑:代小红