文章编号:1672 - 058X(2012)07 - 0016 - 07

一类 $2n$ 阶超线性奇异边值问题正解的存在性

郭 荣, 唐义立, 朱永芳
(安徽大学 数学科学学院,合肥 230039)

摘 要:利用锥压缩和锥拉伸不动点定理,得到一类高阶超线性奇异边值问题的 $C^{2n-2}[0,1]$ 和 $C^{2n-1}[0,1]$ 正解存在的充分条件.

关键词:超线性;奇异边值问题;锥压缩和锥拉伸不动点定理

中图分类号:O177.91 **文献标志码:**A

1 引言及预备知识

随着具有奇性的常微分方程在物理学中的应用,对奇异边值问题的研究引起了学者的广泛兴趣. 当文中的函数 f 在端点 $t=0$ 和 $t=1$ 无界时,问题(1)和(2)是奇异的. 文献[1]利用锥上的不动点定理讨论了一类四阶次线性奇异边值问题正解的存在性. 而后,文献[2]和文献[3]研究了高阶次线性奇异边值问题:文献[3]利用算子的不动点理论进行了讨论,而文献[2]则利用了单调迭代的方法给出了奇异边值问题正解的存在性. 文献[4]利用锥压缩和锥拉伸不动点定理研究了四阶超线性和次线性结合的奇异边值问题正解的存在性. 文献[1]和文献[5]主要运用锥拉伸与锥压缩不动点定理讨论了四阶超线性奇异边值问题正解的存在性. 此处在文献[1]和文献[5]的基础上,讨论了一类含有所有偶数阶导数的高阶超线性奇异边值问题正解的存在性.

此处研究的是下述的含有所有偶数阶导数的 $2n$ 阶超线性奇异边值问题:

$$(-1)^n x^{(2n)}(t) = f(t,x(t),-x''(t),\cdots,(-1)^i x^{(2i)},\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t)),\ \forall t \in (0,1) \tag{1}$$

$$x^{(2i)}(0) = x^{(2i)}(1) = 0, i = 0,1,\cdots,n-1 \tag{2}$$

记 $I=[0,1]$, $J=(0,1)$, $R^+=(0,+\infty)$ 且假定:

(H) $f\in C(J\times(R^+)^n,[0,+\infty))$,在 $t=0$ 与 $t=1$ 是奇异的,且存在常数 λ_i,μ_i,$(1<\lambda_i\leqslant\mu_i, i=0,1,\cdots,n-1)$,使得对于 $t\in(0,1)$, $x_i\in(0,+\infty)$,有:

$$\begin{aligned} c^{\mu_i} f(t,x_0,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{n-1}) \leqslant & f(t,x_0,x_1,\cdots,cx_i,\cdots,x_{n-1}) \leqslant \\ & c^{\lambda_i} f(t,x_0,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{n-1}), 0 \leqslant c \leqslant 1 \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} c^{\lambda_i} f(t,x_0,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{n-1}) \leqslant & f(t,x_0,x_1,\cdots,cx_i,\cdots,x_{n-1}) \leqslant \\ & c^{\mu_i} f(t,x_0,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{n-1}), c \geqslant 1 \end{aligned} \tag{4}$$

其中式(3)与式(4)可以互相推出.

收稿日期:2011 - 09 - 20;**修回日期:**2011 - 11 - 16.

作者简介:郭荣(1984-),女,山东菏泽人,硕士研究生,从事泛函微分方程研究.

注:$f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}p_i(t)x_1^{l_{i1}}x_2^{l_{i2}}\cdots x_n^{l_{in}}$,其中 $p_i(t)>0,p_i(t)\in(0,1),l_{jk}>1,j=1,2,\cdots,m;k=1,2,\cdots,n$,满足上述超线性条件(3)(4).

假设 $f(t,1,1,\cdots,1)\neq 0,t\in(0,1)$,则 $\exists 0<\alpha<\beta<1$,使得

$$\min_{t\in J_0}f(t,1,1,\cdots,1)=\tau_0>0,J_0=[\alpha,\beta] \tag{5}$$

函数 $x(t)\in C^{2n-2}[0,1]\cap C^{2n}(0,1)$ 称为奇异边值问题(1)的 $C^{2n-2}[0,1]$ 正解,是指 $x(t)$ 满足式(1)且在 J 上 $x(t)>0$. 若 $x(t)$ 是式(1)的 $C^{2n-2}[0,1]$ 正解,且 $x^{(2n-1)}(0^+)$ 与 $x^{(2n-1)}(1^-)$ 存在,则称 $x(t)$ 是式(1)的 $C^{2n-1}[0,1]$ 正解.

主要结果的证明要用到下面的引理:

引理 1[9]　(范数形式的锥拉伸与压缩不动点定理)

设 Ω_1,Ω_2 为 E 中有界开集,P 是 E 中的锥,$\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$. $A:P\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续,若满足条件(i) $\|Ax\|\leqslant\|x\|,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$;$\|Ax\|\geqslant\|x\|,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$(即范数锥拉伸);(ii) $\|Ax\|\leqslant\|x\|,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$;$\|Ax\|\geqslant\|x\|,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1$(即范数锥压缩),则 A 在 $P\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$ 中必有不动点.

2　主要结果

定理 1　假设条件(H)满足,则 $f(t,x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 关于 x_i 是单调的.

定理 2　假设条件(H)满足,如果

$$0<\int_0^1 t(1-t)f(t,t(1-t),\cdots,t(1-t),1)\mathrm{d}t<+\infty \tag{6}$$

成立,则奇异边值问题(1)和(2)有 $C^{2n-2}[0,1]$ 正解 $x(t)$,且 $r\leqslant\|x\|\leqslant R$,其中 r,R 为常数.

定理 3　假设条件(H)满足,如果

$$0<\int_0^1 t(1-t)f(t,t(1-t),\cdots,t(1-t))\mathrm{d}t<+\infty \tag{7}$$

成立,则奇异边值问题(1)和(2)有 $C^{2n-1}[0,1]$ 正解.

3　定理证明

1)定理 1 的证明

由 $f(t,x_0,x_1,\cdots,cx_i,\cdots,x_{n-1})\leqslant c^{\lambda_i}f(t,x_0,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{n-1}),\lambda_i>1,0<c\leqslant 1$,故 $f(t,x_0,x_1,\cdots,cx_i,\cdots,x_{n-1})\leqslant c^{\lambda_i}f(t,x_0,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{n-1})\leqslant f(t,x_0,x_1,\cdots,x_i,\cdots,x_{n-1})$,即对于 $t\in(0,1),x_i\in(0,+\infty)$,有:

$$f(t,x_0,\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots,x_{n-1})\leqslant f(t,x_0,\cdots,x_{i-1},y_i,x_{i+1},\cdots,x_{n-1}),0\leqslant x_i\leqslant y_i$$

因此定理 1 成立.

2)定理 2 的证明

引入格林函数:$G(t,s)=\begin{cases}s(1-t),0\leqslant s<t\leqslant 1\\ t(1-s),0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1\end{cases}$,构造空间 $X=\{x\in C^{2n-2}[0,1]\mid x^{(2i)}(0)=x^{(2i)}(1)=0,i=0,1,\cdots,n-1\}$,其范数为:$\|x\|_{2n-2}=\|x^{(2n-2)}\|_0$,其中 $\|x\|_0=\sup_{t\in[0,1]}|x(t)|$,则 X 是完备的.

令 $P=\{x\mid x\in X,x^{(2i)}(0)=x^{(2i)}(1)=0,(-1)^ix^{(2i)}(t)\geqslant 0,\min_{t\in J_0}(-1)^ix^{(2i)}(t)\geqslant\varepsilon^{i+1}\|x\|_{2n-2},i=0,1,2,\cdots,n-1\}$,其中 $\varepsilon=\alpha(1-\beta)$,则 P 是 $C^{2n-2}[0,1]$ 中的锥.

定义 X 中的算子 A 如下:

$$Ax(t)=\int_0^1\cdots\int_0^1 G(t,s_{n-1})G(s_{n-1},s_{n-2})\cdots G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}$$

对问题(1)进行积分,有:

$$\int_0^1 f(t,x(t),-x''(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))\mathrm{d}t=(-1)^n x^{(2n-1)}(1)-(-1)^n x^{(2n-1)}(0)<\infty$$

由文献[1]可知,问题(1)和(2)就等价于求下列积分方程:

$$x(t)=Ax(t)=\int_0^1\cdots\int_0^1 G(t,s_{n-1})G(s_{n-1},s_{n-2})\cdots G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1} \tag{8}$$

即等价于求 $A:X\to X$ 有正的不动点.

利用条件(H)和式(6),证明 $A:P\to P$ 是全连续算子.

仿式(8),对 $(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t)$ 进行积分:

$$\begin{aligned}(-1)^i x^{(2i)}(t)&=\int_0^1\cdots\int_0^1 G(s_{n-i},s_{n-i-1})\cdots G(s_2,s_1)(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t)\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-i-1}\leqslant\\&[t(1-t)]^{n-i-1}\|x\|_{2n-2}\leqslant ct(1-t)\|x\|_{2n-2}\end{aligned} \tag{9}$$

其中 $c\in(0,1),i=0,1,2,\cdots,n-2$.

设 $B\subset P$ 是有界集,$\forall x\in B$,取 $c_0\in(0,1)$,使得 $c_0\|x\|_{2n-2}<1$,有:

$$\begin{aligned}&f(t,x(t),-x''(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))\leqslant\\&(\frac{1}{c_0})^{\mu_0}f(t,c_0x(t),-x''(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))=\\&(\frac{1}{c_0})^{\mu_0}f(t,\frac{c_0x(t)}{e(t)}e(t),-x''(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))\leqslant\\&(\frac{1}{c_0})^{\mu_0}(\frac{c_0x(t)}{e(t)})^{\lambda_0}f(t,e(t),-x''(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))\leqslant\\&\vdots\\&(\frac{1}{c_0})^{\mu_0}(\frac{c_0x(t)}{e(t)})^{\lambda_0}(\frac{1}{c_0})^{\mu_1}(\frac{-c_0x''(t)}{e(t)})^{\lambda_1}\cdots(\frac{1}{c_0})^{\mu_{n-2}}(\frac{c_0(-1)^{n-2}x^{(2n-4)}(t)}{e(t)})^{\lambda_{n-2}}\\&f(t,e(t),e(t),\cdots,e(t),(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))\leqslant\\&(\frac{1}{c_0})^{\mu_0}(\frac{c_0x(t)}{e(t)})^{\lambda_0}(\frac{1}{c_0})^{\mu_1}(\frac{-c_0x''(t)}{e(t)})^{\lambda_1}\cdots(\frac{1}{c_0})^{\mu_{n-2}}(\frac{c_0(-1)^{n-2}x^{(2n-4)}(t)}{e(t)})^{\lambda_{n-2}}(\frac{1}{c_0})^{\mu_{n-1}}\\&f(t,e(t),e(t),\cdots,e(t),c_0(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))\leqslant\\&(\frac{1}{c_0})^{\mu_0}(\frac{c_0x(t)}{e(t)})^{\lambda_0}(\frac{1}{c_0})^{\mu_1}(\frac{-c_0x''(t)}{e(t)})^{\lambda_1}\cdots\\&(\frac{1}{c_0})^{\mu_{n-2}}(\frac{c_0(-1)^{n-2}x^{(2n-4)}(t)}{e(t)})^{\lambda_{n-2}}(\frac{1}{c_0})^{\mu_{n-1}}(c_0(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))^{\lambda_{n-1}}\cdot f(t,e(t),e(t),\cdots,e(t),1)\leqslant\\&c_0^{\lambda_0-\mu_0}(c\|x\|_{2n-2})^{\lambda_0}c_0^{\lambda_1-\mu_1}(c\|x\|_{2n-2})^{\lambda_1}\cdots c_0^{\lambda_{n-2}-\mu_{n-2}}(c\|x\|_{2n-2})^{\lambda_{n-2}}c_0^{\lambda_{n-1}-\mu_{n-1}}((-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))^{\lambda_{n-1}}\\&f(t,e(t),e(t),\cdots,e(t),1)\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $c\in(0,1),e(t)=t(1-t)$.

取 $N'>0$,使得

$$(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t)<N'\|x\|_{2n-2} \tag{11}$$

记 $c_0^{\lambda_i-\mu_i}=M_i$,$(c\|x\|_{2n-2})^{\lambda_i}=N_i$,$i=0,1,2,\cdots,n-1$($M_i,N_i$ 为常数),$(\frac{N'}{c})^{\lambda_{n-1}}=N$,故式(10)可写为:

$$f(t,x(t),-x''(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))\leqslant M_0M_1\cdots M_{n-1}N_0N_1\cdots N_{n-1}Nf(t,t(1-t),\cdots,t(1-t),1) \tag{12}$$

$$\begin{aligned}|Ax(t)| &= \left|\int_0^1\cdots\int_0^1 G(t,s_{n-1})G(s_{n-1},s_{n-2})\cdots G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,\right.\\ &\quad\left.(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}\right|\leqslant\\ &\quad M_0M_1\cdots M_{n-1}N_0N_1\cdots N_{n-1}N\cdot\left|\int_0^1\cdots\right.\\ &\left.\int_0^1 G(t,s_{n-1})G(s_{n-1},s_{n-2})\cdots G(s_2,s_1)\int_0^1 t(1-t)f(t,t(1-t),\cdots,t(1-t),1)\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}\right|\end{aligned} \tag{13}$$

由式(6)可知 $|Ax(t)|<\infty$,故 $A(B)$ 是有界集.

因 $G(t,s)$ 在 $[0,1]\times[0,1]$ 上连续,从而一致连续. 因此,$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta=\delta(\varepsilon)$,使得当 $|t_1-t_2|<\delta$ 时,有:

$$|G(t_1,\xi)-G(t_2,\xi)|<\varepsilon M_0^{-1}M_1^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}N_0^{-1}N_1^{-1}\cdots N_{n-1}^{-1}N^{-1}\cdot\frac{1}{\tau_0},\ \forall\xi\in(0,1) \tag{14}$$

因此,对于 $\forall x\in B$,由式(12)(14)和定理 1 得:

$$\begin{aligned}&|Ax(t_1)-Ax(t_2)|=\\&\left|\int_0^1 G(t_1,s_{n-1})\cdots\int_0^1 G(s_2,s_1)\int_0^1 G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}-\right.\\&\left.\int_0^1 G(t_2,s_{n-1})\cdots\int_0^1 G(s_2,s_1)\int_0^1 G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}\right|=\\&\left|\int_0^1(G(t_1,s_{n-1})-G(t_2,s_{n-1}))\int_0^1 G(s_{n-1},s_{n-2})\cdots\int_0^1 G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,\right.\\&\left.(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}\right|\leqslant\\&\int_0^1|G(t_1,s_{n-1})-G(t_2,s_{n-1})|\left|\int_0^1 G(s_{n-1},s_{n-2})\cdots\int_0^1 G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,\right.\\&\left.(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}\right|<\\&\varepsilon M_0^{-1}M_1^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}N_0^{-1}N_1^{-1}\cdots N_{n-1}^{-1}\cdot\frac{1}{\tau_0}\cdot(t(1-t))^{n-1}\cdot|f(t,x(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(t))|<\\&\varepsilon M_0^{-1}M_1^{-1}\cdots M_{n-1}^{-1}N_0^{-1}N_1^{-1}\cdots N_{n-1}^{-1}N^{-1}\cdot\frac{1}{\tau_0}\cdot M_0M_1\cdots M_{n-1}N_0N_1\cdots N_{n-1}N\cdot f(t,t(1-t),\cdots t(1-t),1)<\\&\varepsilon\cdot\frac{1}{\tau_0}\cdot f(t,1,1,\cdots,1)=\varepsilon\end{aligned} \tag{15}$$

即 A 为等度连续算子,因此 $A(B)$ 是相对紧集.

设 $x_n,x_0\in P$,$x_n\to x_0(n\to\infty)$,则 $\{x_n\}$ 有界. 类似于式(12),有:

$$\begin{aligned}&f(t,x_n(t),-x''_n(t),\cdots,(-1)^{n-1}x_n^{(2n-2)}(t))\leqslant M_0^1M_1^1\cdots M_{n-1}^1N_0^1N_1^1\cdots N_{n-1}^1N^1f(t,t(1-t),\cdots,\\&t(1-t),1)\ |Ax_n(t)-Ax_0(t)|=\\&\quad\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 G(t,s_{n-1})\cdots G(s_1,s)f(s,x_n(s),\cdots,(-1)^{n-1}x_n^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}-\right.\\&\quad\left.\int_0^1\cdots\int_0^1 G(t,s_{n-1})\cdots G(s_1,s)f(s,x_0(s),\cdots,(-1)^{n-1}x_0^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}\right|=\\&\quad\left|\int_0^1\cdots\int_0^1 G(t,s_{n-1})\cdots G(s_1,s)(f(s,x_n(s),\cdots,(-1)^{n-1}x_n^{(2n-2)}(s))-f(s,x_0(s),\right.\end{aligned}$$

$$\cdots,(-1)^{n-1}x_0^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}| <$$

$$(t(1-t))^{n-1}|f(t,x_n(t),\cdots,(-1)^{n-1}x_n^{(2n-2)}(t))-f(t,x_0(t),\cdots,(-1)^{n-1}x_0^{(2n-2)}(t))| \quad (16)$$

由式(6)(15)(16),$f(t,x(t),-x''(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{2n-2}(t))$的连续性及 Lebesgue 控制收敛定理知:$\|Ax_n-Ax_0\|\to 0(n\to\infty)$,即:$A:P\to P$ 是连续算子. 综上所述,$A:P\to P$ 是全连续算子.

由定理 1 及锥 P 的定义,有:

$$\begin{aligned}&f(t,x(t),-x''(t),\cdots,(-1)^{n-1}x^{2n-2}(t))\geqslant\\&f(t,\varepsilon^1\|x\|_{2n-2},\varepsilon^2\|x\|_{2n-2},\cdots,\varepsilon^n\|x\|_{2n-2})\geqslant\\&(\varepsilon^1\|x\|_{2n-2})^{\mu_0}(\varepsilon^2\|x\|_{2n-2})^{\mu_1}\cdots(\varepsilon^n\|x\|_{2n-2})^{\mu_{n-1}}f(t,1,1,\cdots,1)\geqslant\\&\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}}\|x\|_{2n-2}^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}}\tau_0\end{aligned} \quad (17)$$

因 $t\in J_0=[\alpha,\beta]$时,有 $t(1-t)>\alpha(1-\beta)$,因此:

$$\begin{aligned}Ax(t)\geqslant&\int_\alpha^\beta\cdots\int_\alpha^\beta G(t,s_{n-1})G(s_{n-1},s_{n-2})\cdots G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-1}\geqslant\\&(\alpha(1-\beta))^n(\beta-\alpha)^n\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}}\|x\|_{2n-2}^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}}\tau_0=\\&(\beta-\alpha)^n\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}+n}\|x\|_{2n-2}^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}}\tau_0\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}-(Ax)''(t)\geqslant&\int_\alpha^\beta\cdots\int_\alpha^\beta G(t,s_{n-2})\cdots G(s_1,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_{n-2}\geqslant\\&(\alpha(1-\beta))^{n-1}(\beta-\alpha)^{n-1}\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}}\|x\|_{2n-2}^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}}\tau_0=\\&(\beta-\alpha)^{n-1}\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}+n-1}\|x\|_{2n-2}^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}}\tau_0\end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}&(-1)^{n-1}(Ax)^{(2n-2)}(t)\geqslant\int_\alpha^\beta G(t,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s\geqslant\\&\alpha(1-\beta)(\beta-\alpha)\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}}\|x\|_{2n-2}^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}}\tau_0=\\&(\beta-\alpha)\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}+1}\|x\|_{2n-2}^{\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}}\tau_0\end{aligned} \quad (20)$$

因 $\mu_0+\mu_1+\cdots+\mu_{n-1}=i=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\mu_i>1$, 故取:

$$R_1=\max\{n,[(\beta-\alpha)^n\cdot\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}+n}\tau_0]^{-\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i-1}}\}>1$$

$$R_2=\max\{n,[(\beta-\alpha)^{n-1}\cdot\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}+n-1}\tau_0]^{-\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i-1}}\}>1$$

$$\vdots$$

$$R_n=\max\{n,[(\beta-\alpha)\cdot\varepsilon^{\mu_0+\cdots+(i+1)\mu_i+\cdots n\mu_{n-1}+1}\tau_0]^{-\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}\mu_i-1}}\}>1$$

由式(17)-(20)知:

$$\|Ax\|_0\geqslant\|x\|_{2n-2},\forall x\in P,\|x\|_{2n-2}\geqslant R_1 \quad (21)$$

$$\|Ax\|_2\geqslant\|x\|_{2n-2},\forall x\in P,\|x\|_{2n-2}\geqslant R_2 \quad (22)$$

$$\vdots$$

$$\|Ax\|_{2n-2}\geqslant\|x\|_{2n-2},\forall x\in P,\|x\|_{2n-2}\geqslant R_n \quad (23)$$

令 $R=\max\{R_1,R_2,\cdots,R_n\}$,记 $\Omega_2=\{x\in X|\ \|x\|<R\}$,且当 $x\in P$ 时,有 $\|x\|=R$.

由式(21)-(23)知:

$$\|Ax\|\geqslant\|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_2 \quad (24)$$

另一方面,$\forall x(t)\in P$,结合式(9)(11),有(令 $L_i=\int_0^1 G(s_i,s_i)\mathrm{d}s_i$,$i=1,2,\cdots,n-2$,则 $L_i\leqslant\frac{1}{6}$):

$$|Ax(t)| \leqslant \int_1^1 G(t,s_{n-1})\mathrm{d}s_{n-1}\int_0^1 G(s_{n-2},s_{n-2})\mathrm{d}s_{n-2}\cdots\int_0^1 G(s,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s <$$
$$t(1-t)L_{n-2}L_{n-3}\cdots L_1 \|x\|_{2n-2}^{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}\int_0^1 s(1-s)f(s,s(1-s),\cdots,s(1-s),1)\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\|x\|_{2n-2}^{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}\int_0^1 s(1-s)f(s,s(1-s),\cdots,s(1-s),1)\mathrm{d}s \tag{25}$$

$$|(Ax)''(t)| \leqslant \int_1^1 G(t,s_{n-2})\mathrm{d}s_{n-2}\int_0^1 G(s_{n-3},s_{n-3})\mathrm{d}s_{n-3}\cdots\int_0^1 G(s,s)f(s,x(s),\cdots,(-1)^{n-1}x^{(2n-2)}(s))\mathrm{d}s <$$
$$t(1-t)L_{n-3}L_{n-4}\cdots L_1 \|x\|_{2n-2}^{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}\int_0^1 s(1-s)f(s,s(1-s),\cdots,s(1-s),1)\mathrm{d}s \leqslant$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-3}\|x\|_{2n-2}^{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}\int_0^1 s(1-s)f(s,s(1-s),\cdots,s(1-s),1)\mathrm{d}s \tag{26}$$

$$\vdots$$

$$|(Ax)^{(2n-2)}(t)| < \|x\|_{2n-2}^{\lambda_0+\lambda_1+\cdots+\lambda_{n-1}}\int_0^1 s(1-s)f(s,s(1-s),\cdots,s(1-s),1)\mathrm{d}s \tag{27}$$

$$r_1 = \min\left\{\frac{1}{n},\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-2}\int_0^1 s(1-s)f(s,s(1-s),\cdots,s(1-s),1)\mathrm{d}s\right]^{-\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i-1}}\right\}<1$$
$$r_2 = \min\left\{\frac{1}{n},\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-3}\int_0^1 s(1-s)f(s,s(1-s),\cdots,s(1-s),1)\mathrm{d}s\right]^{-\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i-1}}\right\}<1$$
$$\vdots$$
$$r_n = \min\left\{\frac{1}{n},\left[\int_0^1 s(1-s)f(s,s(1-s),\cdots,s(1-s),1)\mathrm{d}s\right]^{-\frac{1}{\sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i-1}}\right\}<1$$

由式(25)-(27)知:

$$\|Ax\|_0 \leqslant \|x\|_{2n-2},\ \forall x\in P,\ \|x\|_{2n-2}\leqslant r_1 \tag{28}$$
$$\|Ax\|_2 \leqslant \|x\|_{2n-2},\ \forall x\in P,\ \|x\|_{2n-2}\leqslant r_2 \tag{29}$$
$$\vdots$$
$$\|Ax\|_{2n-2} \leqslant \|x\|_{2n-2},\ \forall x\in P,\ \|x\|_{2n-2}\leqslant r_n \tag{30}$$

令 $r=\min\{r_1,r_2,\cdots,r_n\}$,记 $\Omega_1=\{x\in X\mid \|x\|<r\}$,且当 $x\in P$ 时,有 $\|x\|=r$.

由式(28)-(30)知:

$$\|Ax\| \leqslant \|x\|,x\in P\cap\partial\Omega_1 \tag{31}$$

由式(24)和式(31)与引理 1 可得:

A 在 P 中至少有一个不动点 $x^*(t)$,且满足 $r\leqslant\|x^*\|\leqslant R$. 由锥 P 的定义和 $r>0$ 可知 $x^*(t)$ 是奇异边值问题(1)和(2)的 $C^{2n-2}[0,1]$ 正解.

3) 定理 3 的证明

假设式(9)成立,取正数 $c>1$,使 $ct(1-t)<1$,于是:

$$f(t,t(1-t),\cdots,t(1-t)) < f(t,t(1-t),\cdots,ct(1-t)) <$$
$$(ct(1-t))^{\lambda_{n-1}}f(t,t(1-t),\cdots,t(1-t),1) < ct(1-t)f(t,t(1-t),\cdots,t(1-t),1)$$

因此有式(7)可推得式(6)成立,由定理 2 可得:边值问题(1)有 $C^{2n-2}[0,1]$ 正解 $x^*(t)\in P$,结合问题(1)与式(7)及式(9),得到:

$$\int_0^1(-1)^n(x^*(t))^{2n}\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t,x^*(t),-(x^*(t))'',\cdots,(-1)^{n-1}(x^*(t))^{(2n-2)})\mathrm{d}t <$$
$$m_0m_1\cdots m_{n-1}n_0n_1\cdots n_{n-1}n\int_0^1 f(t,t(1-t),t(1-t),\cdots,t(1-t))\mathrm{d}t < \infty$$

即 $x^*(t)$ 在 $I=[0,1]$ 上可积,于是:

$$\lim_{t\to 1^-}\left((x^*(t))^{(2n-1)}-(x^*(\frac{1}{2}))^{(2n-1)}\right)=\lim_{t\to 1^-}\int_{\frac{1}{2}}^{t}(x^*(s))^{(2n)}\mathrm{d}s$$

存在,即 $\lim\limits_{t\to 1^-}((x^*(t))^{(2n-1)}$ 存在.

同理, $\lim\limits_{t\to 0^+}((x^*(t))^{(2n-1)}$ 存在,从而 $x^*(t)$ 是问题(1)的 $C^{2n-1}[0,1]$ 正解.

参考文献:

[1] 李秀珍,赵增勤.一类四阶次线性奇异边值问题的正解[J].中国石油大学学报,2009,33(6):167-172

[2] 韦忠礼,李秀珍.一类超线性四阶奇异边值问题的正解[J].工程数学学报,2005,22(1):84-88

[3] 邓义华.一类高阶次线性奇异边值问题的正解[J].安徽大学学报:自然科学版,2007,32(2):1-4

[4] 庞常词,韦忠礼.四阶奇异边值问题两个正解的存在性[J].数学学报,2003,46(2):403-410

[5] 郭大钧.关于锥映象的几个不动点定理[J].科学通报,1983(28):1217-1219

[6] 钱爱侠,仲安娜.奇异超线性四阶边值问题的正解[J].曲阜师范大学学报,2002,28(3):23-26

[7] AGARWAL R P, AKRIVIS G. Boundary value problems occuring in plate deflection theory[J]. J Comp Appl Math, 1982(8): 145-154

[8] 李秀珍,赵增勤.一类 $2n$ 阶次线性奇异边值问题的正解[J].系统科学与数学,2010,30(3):379-391

[9] 阿布都瓦克.玉奴司,张四保.欧氏环中两元的最大公因式及其性质[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(3):223-224,239

The Existence of Positive Solutions of a Class of Singular Super-linear Boundary Value Problems of 2n Order Differential Equations

GUO Rong, TANG Yi-li, ZHU Yong-fang

(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: Sufficient conditions for the existence of $C^{2n-2}[0,1]$ positive solutions as well as $C^{2n-1}[0,1]$ positive solutions of a class of singular super-linear boundary value problem of higher order differential equations are obtained by using a fixed point theorem of cone expansion and cone compression of norm type.

Key words: super-linear; singular boundary value problem; a fixed point theorem of cone expansion and cone compression

责任编辑:李翠薇