**文章编号:**1672 - 058X(2012)07 - 0014 - 04

# 亚纯函数涉及分担值的唯一性

宫 俊 英

(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

**摘　要:**应用 Nevanlinna 值分布理论,研究亚纯函数与它的微分多项式分担一个值的唯一性问题. 通过两个函数 CM 分担 1,并且引入两个函数的极点和零点的次数的思想,对文献进行改进,得到了新的结论. 改进和推广了有关亚纯函数唯一性的一些结果.

**关键词:**唯一性;亚纯函数;分担值;微分多项式

**中图分类号:**O174. 52　　　　**文献标志码:**A

## 1　引言与主要结果

设 $f(z)$ 是复平面 $C$ 上的一个非常数亚纯函数,采用 Nevanlinna 值分布理论的一些标准符号,例如 $T(r,f)$, $m(r,f)$, $N(r,f)$, $S(r,f)$, $\overline{N}(r,f)$ 等,这些符号在文献[1]-[3]中有介绍. 对于任何常数 $a$,定义:

$$\Theta(a,f) = 1 - \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})}{T(r,f)} \tag{1}$$

其中 $\overline{N}(r,\frac{1}{f-a})$ 表示 $f-a$ 的所有零点的计数函数,其次数只记一次.

设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数,$a$ 是一个有限复数. 如果 $f-a$ 和 $g-a$ 有相同的零点并且零点的次数也相同,就说 $f(z)$ 和 $g(z)$ CM 分担 $a$.

2007 年,文献[4]证明了下面的结果.

**定理 A**　设 $f(z)$, $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数,$n,k$ 是两个正整数且满足 $n>3k+8$. 如果 $[f^n]^{(k)}$ 和 $[g^n]^{(k)}$ CM 分担 1,则 $f(z)=c_1e^{cz}$, $g(z)=c_2e^{-cz}$. 其中 $c,c_1$ 和 $c_2$ 是 3 个常数,满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$ 或 $f=tg$,其中 $t$ 是常数且 $t^n=1$.

此处将引入零点和极点的次数,对定理 A 进行改进得到下面的结果.

**定理 1**　设 $f(z)$, $g(z)$ 是两个非常数亚纯函数,它们的零点和极点的次数都至少是 $s$. $n,m,k$ 是 3 个正整数满足 $n>2k$ 且 $ns>3k+8$. 如果 $[f^n]^{(k)}$ 和 $[g^n]^{(k)}$ CM 分担 1,则 $f(z)=c_1e^{cz}$, $g(z)=c_2e^{-cz}$,其中 $c,c_1$ 和 $c_2$ 是 3 个常数,满足 $(-1)^k(c_1c_2)^n(nc)^{2k}=1$ 或是 $f=tg$,其中 $t$ 是常数且 $t^n=1$.

注:其中当 $s=1$ 时定理 1 即为定理 $A$.

**收稿日期:**2011 - 10 - 19;**修回日期:**2011 - 11 - 22.

**作者简介:**宫俊英(1984-),女,山西忻州人,硕士研究生,从事亚纯函数唯一性的研究.

## 2　几个引理

**引理 1**[5]　设$f(z)$,$g(z)$是两个非常数亚纯函数,$k$ 是一个正整数. 如果$f^{(k)}$和$g^{(k)}$CM 分担 1 并且满足$\Delta=(k+2)\Theta(\infty,f)+2\Theta(\infty,g)+(k+2)[\Theta(0,f)+\Theta(0,g)]\geqslant 3k+7$,则$f^{(k)}g^{(k)}\equiv 1$或是$f\equiv g$.

**引理 2**[6]　设$f(z)$是一个非常数整函数,$k\geqslant 2$ 是一个正整数,如果$f(z)f^{k}(z)\neq 0$,则$f=\mathrm{e}^{az+b}$,其中 $a\neq 0$,$b$ 是常数.

## 3　定理 1 的证明

**证明**　记 $F(z)=f^{n}(z)$,$G(z)=g^{n}(z)$. 考虑:

$$\overline{N}(r,\frac{1}{F})=\overline{N}(r,\frac{1}{f^{n}})\leqslant\frac{1}{sn}N(r,\frac{1}{F})\leqslant\frac{1}{sn}[T(r,F)+O(1)]$$

根据公式(1),有:

$$\Theta(0,F)=1-\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\overline{N}(r,\frac{1}{F})}{T(r,F)}\geqslant 1-\frac{1}{sn}$$

同样 $\Theta(0,G)\geqslant 1-\frac{1}{sn}$,$\Theta(\infty,F)\geqslant 1-\frac{1}{sn}$,$\Theta(\infty,G)\geqslant 1-\frac{1}{sn}$.

因此:

$$\Delta=(k+2)\Theta(\infty,F)+2\Theta(\infty,G)+(k+2)[\Theta(0,F)+\Theta(0,G)]\geqslant 3k+8-\frac{3k+8}{sn}$$

由 $sn>3k+8$,得到 $\Delta>3k+7$. 考虑 $F^{(k)}(z)=[f^{n}(z)]^{(k)}$和 $G^{(k)}(z)=[g^{n}(z)]^{(k)}$CM 分担 1,然后根据引理 1,就得到 $F^{(k)}G^{(k)}\equiv 1$ 或是 $F\equiv G$.

下面分两种情形讨论:

**情形 1**　$F^{(k)}G^{(k)}\equiv 1$,即:

$$[f^{n}(z)]^{(k)}[g^{n}(z)]^{(k)}\equiv 1 \tag{2}$$

需证明:

$$f\neq 0,\infty;g\neq 0,\infty \tag{3}$$

若 $z_0$ 是$f$的 $p$ 级零点,则是$[f^{n}]^{(k)}$的零点,其级数为 $np-k$. 显然 $z_0$ 是 $g$ 的极点,设为 $g$ 的 $q$ 级极点,则 $z_0$ 是$[g^{n}]^{(k)}$的极点,其级数为 $nq+k$. 由式(2),得到:

$$np-k=nq+k$$

即 $n(p-q)=2k$,这和 $n\geqslant 2k$ 且 $p,q$ 是整数相矛盾.

因此$f\neq 0,\infty$;$g\neq 0,\infty$,由式(2)(3),即得:

$$[f^{n}]^{(k)}\neq 0;[g^{n}]^{(k)}\neq 0 \tag{4}$$

由式(2)-(4)和引理 2,就可以得到$f(z)=c_1\mathrm{e}^{cz}$和 $g(z)=c_2\mathrm{e}^{-cz}$,其中 $c$,$c_1$ 和 $c_2$ 是 3 个常数且满足$(-1)^{k}(c_1c_2)^{n}(nc)^{2k}=1$.

**情形 2**　$F\equiv G$,即$f^{n}(z)=g^{n}(z)$.

所以 $f\equiv tg$,其中 $t$ 是常数且 $t^{n}=1$. 完成定理 1 的证明.

**(下转第 32 页)**

# Discussion on Iteration Solution to the System of Linear Equation

**LI Huan-rong**

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

**Abstract**: The iteration solution to big sparse system of linear equations is not only the main contents of numerical algebra theory but also an important solution to practical problems. According to three typical iteration solutions to big sparse system of linear equations such as Jacobi iteration, Gauss-Seidel iteration and SOR iteration, their calculation speed and efficiency are analyzed through practical examples, which provide reference and basis for students and engineers who learn and use iteration solution to linear equation system to better understand and apply iteration solutions.

**Key words**: Jacobi iteration; Gauss-Seidel iteration; SOR iteration; linear equation system

责任编辑:李翠薇

(上接第 15 页)

参考文献:

[1] 杨乐. 值分布论及其新研究[M]. 北京:科学出版社,1982

[2] HAYMAN W K. Meromorphic function[M]. Claredon Press, Oxford, 1964

[3] 仪洪勋,杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京:科学出版社,1995

[4] BHOOSNURMATH S S, DYAVANAL R S. Uniqueness and value-sharing of meromorphic functions[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2007(53):1191-1205

[5] DYAVANAL R S. Uniqueness and value-sharing of differential polynomials of meromorphic functions[J]. Math Anal Appl, 2010(372):335-345

[6] FRANK G. Eine Vermutung von Hayman uber Nullstellen meromorphic function[J]. Math Z, 1976(149):29-36

# Uniqueness of Meromorphic Functions Related to Shared Value

**GONG Jun-ying**

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 401331, China)

**Abstract**: Using Nevanlinna's value distribution theory, this paper studied the uniqueness theorem of meromorphic functions concerning differential polynomials that shared only one value. Two functions shared 1 CM with the multiplicities of zero and pole of two functions. This paper improved the result of reference and got new result. Some results about the uniqueness of meromorphic functions were improved and generalized.

**Key words**: uniqueness; meromorphic function; share values; differential polynomials

责任编辑:李翠薇