文章编号:1672 - 058X(2012)07 - 0009 - 05

不同形式的泰勒定理及其应用*

赵文强, 丁宣浩
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:泰勒定理是把函数用多项式近似表示的重要依据,是数学分析课程的重要内容.给出了泰勒定理的不同证明,讨论带不同余项的泰勒公式之间的关系,以及在积分计算、级数收敛性判断等方面的应用.

关键词:泰勒定理;Lagrange 型余项;Peano 型余项;积分型余项;柯西型余项
中图分类号:O172.2 **文献标志码:**A

函数是分析学的研究对象,简单而又基本的函数就是多项式函数,它具有形式简单的表达式和很好的分析性质,比如无穷可微性等.泰勒定理就是把函数用多项式近似表示的重要依据,利用该定理可以把对复杂函数的研究转化为一个多项式来处理.因此,泰勒定理是函数近似计算和理论探讨常用的重要工具,在分析学中具有重要地位,利用其展开式以及各种余项类型可以简单的解决一些复杂的问题.所以对泰勒公式的综合性研究对数学分析的教学有重要意义.各种分析教材都强调函数展开的方法和技巧,泰勒公式的应用谈及很少,而且零星散布于分析教材的不同章节,见文献[1-2].最近文献[3]对泰勒公式的应用进行了一些探讨.此处主要考虑对带各种余项的泰勒公式的证明,以及它们之间相互递推关系,最后通过实例说明在运用过程中的一些技巧和方法.

1 不同形式的泰勒定理

1.1 带 Lagrange 余项的泰勒定理

定理 1 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有直到 n 阶的连续导数,在 (a,b) 内有 $n+1$ 阶导数,则对任意给定的 x, $x_0\in[a,b]$,至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{1}$$

式(1)称为泰勒公式,其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$($\xi$ 在 x_0 与 x 之间)为 Lagrange 余项.

证明 可以运用柯西微分中值定理证明该结果.为此,引入辅助函数

$$P_n(x)=f(x)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \tag{2}$$

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x),Q_n(x)=(x-x_0)^{(n+1)}$$

收稿日期:2011 - 12 - 15;**修回日期:**2011 - 12 - 28.
* **基金项目:**国家自然科学基金(10871217);重庆市教委资助项目(KJ110701);重庆市教委科技项目(KJ120703).
作者简介:赵文强(1969-),男,四川南江人,讲师,博士研究生,从事泛函分析及应用研究.

显然,$R_n(x)$和$Q_n(x)$在(a,b)内具有直到$n+1$阶的导数,且$R_n(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$,$Q_n(x_0)=Q_n^{(n)}(x_0)=0$. 不防设$x_0<x$,则$R_n(x)$和$Q_n(x)$在$(x_0,x)$内重复$n$次,使用柯西微分中值定理,得

$$\frac{R_n(x)}{Q_n(x)}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{Q_n(x)-Q_n(x_0)}=\frac{R'_n(\xi_1)}{Q'_n(\xi_1)}=\frac{R'_n(\xi_1)-R'_n(x_0)}{Q'_n(\xi_1)-Q'_n(x_0)}=\cdots=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{Q_n^{(n+1)}(\xi)}$$

其中$\xi\in(x_0,x)$. 注意到$R_n^{(n+1)}(\xi)=f^{(n+1)}(\xi)$,$Q_n^{(n+1)}(\xi)=(n+1)!$,于是得到

$$R_n(x)=f(x)-P_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}Q_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

1.2 带 Peano 余项的泰勒定理

定理2 若函数$f(x)$在点x_0存在直至n阶导数,有:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中$R_n(x)=o((x-x_0)^n)$为Peano(皮亚诺)余项.

证明 该问题就是要证明$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$当$x\to x_0$时,$R_n(x)$是比$(x-x_0)^n$高阶的无穷小,其中$p_n(x)$如式(2). 注意到$R_n(x)$在包含x_0的小邻域内$(n-1)$阶连续可微,n阶可导,且在点x_0处$R_n(x_0)=\cdots=R_n^{(n)}(x_0)=0$,于是运用罗比达法则$n$次,得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=\cdots=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n-1)}(x)}{n(n-1)\cdots2(x-x_0)}=\lim_{x\to x_0}\frac{R_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{R_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0$$

1.3 带积分型余项的泰勒定理

定理3 若函数$f(x)$在点x_0的领域$U(x_0)$内有连续的$n+1$阶导数,则$\forall x\in U(x_0)$,有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{3}$$

其中$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+1)}(s)(x-s)^n\mathrm{d}s$为积分型余项,并且

$$R_n(x)=\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(x_0+t(x-x_0))(1-t)^n\mathrm{d}t \tag{4}$$

证明 运用牛顿-莱布尼兹公式以及多次使用分部积分法,得

$$\begin{aligned}f(x)&=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}t=f(x_0)-\int_{x_0}^{x}f'(t)\mathrm{d}(x-t)=\\&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\int_{x_0}^{x}f''(t)(x-t)\mathrm{d}t=\\&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}f''(t)\mathrm{d}(x-t)^2=\\&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}f'''(t)(x-t)^2\mathrm{d}t=\\&\cdots=\\&f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\\&\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}f^{(n+!)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t\end{aligned}$$

最后,如果做变量代换$s=x_0+t(x-x_0)$,则得到式(4).

1.4　带柯西型余项的泰勒定理

定理 4　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的领域 $U(x_0)$ 内有连续的 $n+1$ 阶导数,则 $\forall x\in U(x_0)$,有

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+R_n(x) \tag{5}$$

其中 $R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))(1-\theta)^n(x-x_0)^{n+1}\quad(0\leqslant\theta\leqslant1)$,特别当 $x_0=0$,则又有简单形式 $R_n(x)=\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\theta x)(1-\theta)^n x^{n+1}\quad(0\leqslant\theta\leqslant1)$,此处 $R_n(x)$ 统称为柯西型余项.

证明　由定理 3,再结合推广的积分中值定理,容易推得该结果.

现在可以比较 4 个定理反应的泰勒公式的特点. 首先,余项的形式不同,带 Peano 余项的泰勒公式以高阶无穷小的形式给出,是函数展开表达式的一个定性描述,而带 Lagrange 余项和柯西型余项的泰勒公式都是以中值的形式给出,是函数展开表达式的一个定量描述,对用多项式逼近函数时产生的误差可以给出定量的估计,而积分余项是个没有近似误差估计的余项. 其次,从推导过程来看,带 Lagrange 余项的泰勒公式是用柯西中值定理证明,带 Peano 余项的泰勒公式是用洛必达法则证明,带积分余项的泰勒公式是重复运用分布积分法推得. 同时运用广义上的积分中值定理易看出,带 Lagrange 余项的泰勒公式和带柯西型余项的泰勒公式都是带积分余项的泰勒公式的一个推论. 注意到若 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域上有 $(n+1)$ 阶连续导数并且一直有界,则由 Lagrange 余项可以推得 Peano 余项.

2　定理的应用分析

2.1　带 Lagrange 余项的泰勒公式证明不等式

在欲证明的不等式中,当题目的条件或结论中含有高阶导数时,合理地选取泰勒公式的展开点,并且展开式的的最高阶导数一般不超过问题中出现的高阶导数,然后利用高阶导数的有界性进行放缩,得到需证的不等式. 对泰勒公式中展开点 x_0 和被展开点 x 的选取很有讲究,甚至展开的阶数和项数都需要因势而变.

例 1　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上二阶可导,在开区间 $(0,1)$ 内取到最大值 $\frac{1}{2}$,且二阶导数满足 $|f''(x)|\leqslant2$,证明:$|f(0)|+|f(1)|\leqslant2$.

解　设 $x_0\in(0,1)$ 为函数的最大值点,则 $f(x_0)=\frac{1}{2}$ 且 $f'(x_0)=0$. 把函数 $f(x)$ 在 $x=0,1$ 处的值用 x_0 处的带 Lagrange 余项的泰勒公式(1)表示,且最高阶导数为 2,则

$$f(0)=f(x_0)+f'(x_0)(0-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x_0)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2,\xi_1\in(0,x_0)$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2,\xi_2\in(x_0,1)$$

于是 $|f(0)|+|f(1)|\leqslant1+x_0^2+(1-x_0)^2\leqslant1+1=2$,不等式得证.

2.2　泰勒公式在判断级数敛散性方面的应用

正项级数敛散性的比较判别法,本质上就是要求寻找另一个敛散性已知的级数,来比较它们的通项是否同阶无穷小,泰勒公式就给出了找同阶无穷小的方法.

例 2　设函数 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 具有连续的二阶导数,且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=A$. 试证明:若 $A\neq0$,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$

发散;若 $A=0$,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.

解 由函数 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 具有连续的二阶导数,且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=A$,可知 $f(0)=0$ 及 $f'(0)=A$. 把 $f(x)$ 在 $x_0=0$ 展开成带二阶 Lagrange 余项的泰勒公式(1)的形式,得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2=Ax+\frac{f''(\xi)}{2!}x^2$$

其中 ξ 在 0 与 x 之间. 令 $x=\frac{1}{n}$,得

$$f(\frac{1}{n})=A\frac{1}{n}+\frac{f''(\xi)}{2!}\frac{1}{n^2},0<\xi<\frac{1}{n} \tag{6}$$

若 $A\neq 0$,则 n 充分大的时,$f(\frac{1}{n})$ 不变号,可认为 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 为同号级数. 从式(6)可以看出,当 $n\to\infty$ 时,$f(\frac{1}{n})$ 是与 $\frac{1}{n}$ 同阶的无穷小量,所以 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 敛散性相同,又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,从而 $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 发散. 若 $A=0$,注意到 $f(x)$ 在点 $x_0=0$ 具有连续的二阶导数,则在 $x_0=0$ 的一个闭邻域内 $|f''(\xi)|\leqslant M$,M 为一正常数. 于是

$$|f(\frac{1}{n})|=|\frac{f''(\xi)}{2!}\frac{1}{n^2}|\leqslant\frac{M}{2}\frac{1}{n^2}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的,于是由级数敛散的比较判别法,得证.

2.3 利用带积分型余项的泰勒公式计算定积分

将公式(3)变形得:

$$\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t=n!R_n(x)=$$

$$n!(f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)-\cdots-\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n) \tag{7}$$

因此,可以用公式(7)计算一些比较复杂的定积分,特别是以 n 为参变量的含参量积分.

例3 计算 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)^6\cos x\mathrm{d}x$.

解 设 $f(x)=\sin x$,则 $f^{(6+1)}(x)=\sin[x+(6+1)\frac{\pi}{2}]=-\cos x$,由公式(7)有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x(\frac{\pi}{2}-x)^6\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin[x+(6+1)\frac{\pi}{2}](\frac{\pi}{2}-x)^6\mathrm{d}x=$$

$$-6!(1-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3!}.(\frac{\pi}{2})^3-\frac{1}{5!}(\frac{\pi}{2})^5)$$

2.4 利用带 Peano 余项的泰勒公式在无穷小问题中的应用

例4 确定 α 的值,使得函数 $x-x^2+x^2\mathrm{e}^x-3\sin x+2\sin x\cos x$ 与 x^α 为同阶无穷小.

解 $\alpha=3$,因 $x-x^2+x^2\mathrm{e}^x-3\sin x+\sin 2x=x-x^2+x^2(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^3))-3(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))+(2x-\frac{8x^3}{6}+o(x^3))=\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$.

2.5　利用泰勒公式求极限

利用常见函数的泰勒公式,可以大大简化函数的形式,在求极限时方便快捷,解答完美流畅,不失为求复杂极限时可尝试的好方法.

例 5　计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}]$.

解　先做变量代换,令 $t=\frac{1}{x}$,利用 e^t 和 $(1+t)^\alpha$ 的带 Peano 余项泰勒公式,可得

$$e^t(1-t+\frac{t^2}{2})-\sqrt{1-t^6}=(1+t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{6})(1-t+\frac{t^2}{2})-1+o(t^3)=\frac{t^3}{6}+o(t^3)$$

$$\lim_{x\to+\infty}[(x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6-1}]=\lim_{t\to0+}\frac{e^t(1-t+\frac{t^2}{2})-\sqrt{1-t^6}}{t^3}=\frac{1}{6}$$

参考文献:

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 北京,高等教育出版社,2001

[2] 陈传璋,金福临,朱学炎,等. 数学分析[M]. 北京,高等教育出版社,1983

[3] 齐成辉. 泰勒公式的应用 [J]. 陕西师范大学学报:自然科学版,2003(S1):23-25

[4] 赵文强. 关于含参量广义积分一致收敛性的教学研究[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(5):458-462

On Different Types of Taylor Theorems and Their Applications

ZHAO Wen-qiang, DING Xuan-hao

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University,
Chongqing 400067, China)

Abstract: Taylor Theorems, which is an important part in mathematical analysis textbooks, present the basis for approximately describing a function by polynomial. In this paper, we give the different proofs about Taylor Theorems and discuss their relationships between Taylor Theorems with different remainders and their applications to such as integral calculation and determination of the convergence of series, etc.

Key words: Taylor Theorem; Lagrange type remainder; Peano type remainder; integration type remainder; Cauchy type remainder

责任编辑:李翠薇