文章编号:1672-058X(2012)07-0006-03

Poisson 分布的参数函数无偏估计*

胡 祥, 吴 涛, 李健平
(安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230039)

摘 要:讨论了在 Poisson 分布情况下参数函数的无偏估计,并给出相应的证明和实例.

关键词:泊松分布;线性函数;指数函数;无偏估计
中图分类号:O211.3 **文献标志码**:A

泊松分布是概率统计学科中一种重要的离散分布,在实际中有着广泛的应用,它常与单位时间或单位面积及单位产品上的计数过程相联系.例如,在单位时间内,电话总机接到用户呼唤的次数,路口通过的车辆数,放射性物质放射出的 a 粒子数,每平方米玻璃上的气泡数等等都可以用泊松分布来描述[1].泊松分布参数 λ 具有明显的统计意义,对其估计方法与性质的研究是现代统计研究的重要课题,许多学者进行了研究[2-4],而最常用见的是求参数 λ 的无偏估计.

参数函数的估计也是研究的重点.风险集体中索赔次数服从一个 $P(\lambda)$ 分布,参数 λ 未知,有些情况,使用一个容易观察的理赔数据模型很方便,例如伽玛分布,适用于理赔分布的尾概率不是太重的情形,比如在机动车险中自己车辆损伤情形.不同的参数分布解决不同的理赔问题,理赔泊松分布模型中,不仅仅涉及参数 λ 的估计,同时涉及参数 λ 函数的估计.文献[5]讨论了参数的倒数的估计.

在参数无偏估计中,人们并不是一味的应用参数 λ 的无偏估计,有时更多的应用参数 λ 函数的无偏估计.此处给定泊松样本,考虑泊松分布参数函数在指数函数 $g(\lambda)=e^{k\lambda+b}$ 的无偏估计问题.

1 泊松分布的参数无偏估计

总体为泊松分布 $P(\lambda)$ 时,设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为一个简单的泊松随机样本:

$$P(X=x)=\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda},x=0,1,2,3$$

未知参数 $\theta=\lambda>0$,可以证明样本均值 $\overline{X}$ 和样本均值方差:

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

都是总体参数 $\theta=\lambda$ 的无偏估计.推广到一般情况下,对任意实数 a,$0\leqslant a\leqslant 1$,$a\overline{X}+(1-a)S^2$ 也都是 λ 的无偏估计.可以看到参数的无偏估计不仅仅只有一个,可以有许多种,当然参数亦可能没有无偏估计.

收稿日期:2011-11-12;**修回日期**:2011-12-20.
* **基金项目**:国家自然科学基金(61073117);安徽大学创新团队(KJTD001B);安徽大学研究生学术创新项目(yfc090008).
作者简介:胡祥(1986-),男,安徽六安人,硕士研究生,从事统计计算及其应用研究.

2　参数函数的无偏估计

当$\hat{\theta}$是未知参数θ的无偏估计量时，$g(\hat{\theta})$不一定是$g(\theta)$的无偏估计量. 换句话说，在一定的情况下，$E(g(\hat{\theta}))=g(\hat{\theta})$，也有可能$E(g(\hat{\theta}))\neq g(\hat{\theta})$，甚至还有$g(\hat{\theta})$不存在的可能.

结论 1　设函数$g_1(\lambda)=a\lambda+b$，可以证明$g_1(\lambda)$的无偏估计为$g_1(\hat{\lambda})=a\lambda+b$.

证明　$E(g(\lambda))=E(a\lambda+b)=E(a\lambda)+E(b)=aE(\lambda)+b=a\lambda+b=g(\lambda)$，可以看出，线性函数情况下，满足$g(\hat{\theta})$是$g(\theta)$的无偏估计量. 但线性函数是一种简单的函数. 并不是所有的函数都满足上述的情况.

结论 2　设函数$g_1(\theta)=g_1(\lambda)=\mathrm{e}^{k\lambda}$，当$k>0$，可以证明$g_1(\lambda)$的无偏估计不是$g_1(\hat{\lambda})=\mathrm{e}^{k\bar{X}}$，而是$g_1(\hat{\lambda})=(k+1)^{X_i}$.

证明　$E[g_1(\hat{\lambda})]=E[(k+1)^{X_i}]=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(k+1)^{X_i}P(X_i=x)=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(k+1)^{X_i}\dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{x=0}^{\infty}\dfrac{[(k+1)\lambda]^x}{x!}=\mathrm{e}^{[(k+1)\lambda]}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{k\lambda}$.

结论 2 的前面一部分证明参见文献[2].

通过例子，更好地说明上面的结论. 当$k=2$时，$g_1(\theta)=g_1(\lambda)=\mathrm{e}^{2\lambda}$，$g_1(\lambda)$的无偏估计是$3^{X_i}$.

证明　$E(3^{X_i})=\sum\limits_{x=0}^{\infty}3^{X_i}P(X_i=x)=\sum\limits_{x=0}^{\infty}3^{X_i}\dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{x=0}^{\infty}\dfrac{(3\lambda)^x}{x!}=\mathrm{e}^{3\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{2\lambda}$.

结论 3　函数$g_2(\theta)=g_2(\lambda)=\mathrm{e}^{k\lambda}$，$-1<k<0$，可以证明$g_2(\lambda)$的无偏估计不是$g_2(\hat{\lambda})=\mathrm{e}^{k\bar{X}}$，而是$g_2(\hat{\lambda})=(1+k)^{X_i}$.

证明　$E[g_2(\hat{\lambda})]=E[(1+k)^{X_i}]=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(1+k)^{X_i}P(X_i=x)=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(1+k)^{X_i}\dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{x=0}^{\infty}\dfrac{[(1+k)\lambda]^x}{x!}=\mathrm{e}^{[(1+k)\lambda]}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{k\lambda}$.

结论 3 的前面一部分证明参见文献[2].

通过例子，更好地说明上面的结论. 当$k=-0.5$时，$g_2(\theta)=g_2(\lambda)=\mathrm{e}^{-0.5\lambda}$，$g_2(\lambda)$的无偏估计是$(0.5)^{X_i}$.

证明　$E((0.5)^{X_i})=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(0.5)^{X_i}P(X_i=x)=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(0.5)^{X_i}\dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{x=0}^{\infty}\dfrac{(0.5\lambda)^x}{x!}=\mathrm{e}^{0.5\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-0.5\lambda}$.

结论 4　函数$g_3(\theta)=g_3(\lambda)=\mathrm{e}^{k\lambda}$，$k<-1$，可以证明$g_3(\lambda)$的无偏估计不是$g_3(\hat{\lambda})=\mathrm{e}^{k\bar{X}}$，而是$g_3(\hat{\lambda})=\begin{cases}-k-1, & \text{当 } x_i \text{ 为偶数时}\\ -(-k-1), & \text{当 } x_i \text{ 为奇数时}\end{cases}$.

证明　$E[g_3(\hat{\lambda})]=E[(-(-k-1))^{x_i}]=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(-(-k-1))^{x_i}P(X_i=x)=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(-(-k-1))^{x_i}\dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{x_i=0}^{\infty}\dfrac{[(-1-k)\lambda]^{x_i}}{x_i!}=\mathrm{e}^{[(1+k)\lambda]}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{k\lambda}$.

结论 4 的前面一部分证明参见文献[2].

通过例子，更好地说明上面的结论. 当$k=-2$时，$g_3(\theta)=g_3(\lambda)=\mathrm{e}^{-2\lambda}$，可以证明$g_3(\lambda)$的无偏估计$g_3(\hat{\lambda})=\begin{cases}1, & \text{当 } x_i \text{ 为偶数时}\\ -1, & \text{当 } x_i \text{ 为奇数时}\end{cases}$.

证明　$E[g_3(\hat{\lambda})]=E[(-1)^{x_i}]=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(-1)^{x_i}P(X_i=x)=\sum\limits_{x=0}^{\infty}(-1)^{x_i}\dfrac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-\lambda}\sum\limits_{x=0}^{\infty}\dfrac{[-\lambda]^x}{x!}=\mathrm{e}^{-\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda}=\mathrm{e}^{-2\lambda}$.

特别地,当 $k=-1$,$g_4(\theta)=g_4(\lambda)=e^{-\lambda}$,可以证明 $g_4(\lambda)$ 的无偏估计为 $g_4(\hat{\lambda})=\begin{cases}1, x_i=0\\0, x_i\neq 0\end{cases}$,而不是 $g_4(\hat{\lambda})=e^{-\bar{x}}$.

证明 $E[g_4(\hat{\lambda})]=\sum\limits_{x=0}^{\infty}g_4(\hat{\lambda})P(X_i=x)=e^{-\lambda}\sum\limits_{x=0}^{\infty}0\cdot\dfrac{\lambda^x}{x!}+e^{-\lambda}\cdot 1\cdot\dfrac{\lambda^0}{0!}=e^{-\lambda}$

结论 4 的前面一部分证明参见文献[2].

综上所述,有以下结论:

定理 1 对于参数下的线性函数 $g(\lambda)=e^{kx+b}$,$g(\lambda)$ 的无偏估计需分情况讨论:

当 $k<0$ 时,$g_1(\hat{\lambda})=(k+1)^{X_i}e^b$;当 $-1<k<0$ 时,$g_2(\hat{\lambda})=(k+1)^{X_i}e^b$;当 $k=0$ 时,$g_3(\hat{\lambda})=e^b$;当 $k=-1$ 时,$g_4(\hat{\lambda})=\begin{cases}e^b, x_i=0\\0, x_i\neq 0\end{cases}$;当 $k<-1$ 时,$g_5(\hat{\lambda})=\begin{cases}(-k-1)e^b, \text{当 } x_i \text{ 为偶数时}\\-(-k-1)e^b, \text{当 } x_i \text{ 为奇数时}\end{cases}$.

参考文献:

[1] 李贤平. 概率论基础[M]. 北京:高等教育出版社,1996

[2] SADDOGHI-ALVANDI S M. Estimation of the Parameter of a Poisson Distribution Using a Line Loss Function[J]. Australian Journal of Statistics,1990,32(3):393-398

[3] NASIRI P. Estimation Parameter of Zero Truncated Mixed Poisson Models[J]. International. Journal of Math Analysis,2011,5(10):465-470

[4] 孙皆宜,步金芳,孙翠先. 泊松分布中参数的无篇估计[J]. 唐山学院学报,2009(6):8-9

[5] 徐宝,付志慧,张洪刚. 贝叶斯框架下泊松分布参数倒数的估计[J]. 吉林师范大学学报:自然科学版,2010(1):57-58;63

[5] 陈希孺. 数理统计引论[M]. 北京:科学出版社,1981

[6] 师义民. 数理统计[M]. 北京:科学出版社,1982

[7] 王丙参,魏艳华,孙春晓. 泊松分布与二项分布在风险管理中的应用[J]. 天水师范学院学报,2008(5):23-24

Unbiased Estimation of Parameter Function in Poisson Distribution

HU Xiang, WU Tao, LI Jian-ping

(School of Mathematical Science, Anhui University, Anhui Hefei 230039, China)

Abstract: In this paper, we discuss the unbiased estimation of the unknown parameter function based on Poisson distribution and give corresponding proof and examples.

Key words: Poisson distribution; linear function; exponential function; unbiased estimation

责任编辑:李翠薇