文章编号:1672 - 058X(2012)07 - 0001 - 05

一类二阶非线性时滞微分方程周期解存在问题 *

周 玲, 周宗福
(安徽大学 数学科学学院,安徽 合肥 230039)

摘 要:利用 Mawhin 重合度理论及一些分析技巧研究了二阶非线性时滞微分方程的周期解存在的问题:$x''(t)+f(t,x_t)[x'(t)]^n+a(t)x^3(t)+b(t)x^2(t)+c(t)x(t)=p(t)\ (n>2)$;并给出方程至少存在 3 个周期性解的充分性定理.

关键词:多个周期解;重合度;时滞微分方程
中图分类号:O178 **文献标志码:**A

由于泛函微分方程周期解的存在性在生态学和控制论等领域都有重要意义,引起了人们的关注,并出现了一些好的结果. 文献[1]用重合度理论研究了如下二阶泛函微分方程

$$x^n(t)+f(t,x_t)x^m+\beta(t)g(x(t-\tau(t)))=p(t)$$

周期解存在性的问题;文献[2]用重合度理论研究了泛函微分方程

$$x''(t)+f(t,x(t),x(t-\tau(t)))[x'(t)]^n+a(t)x^2(t)+b(t)x(t)=p(t)\quad(n\geqslant 2)$$

得到其存在两个周期解的充分条件;Mawhin 重合度延拓定理已成为研究周期解存在性问题的强有力的工具,在生态方程周期解的研究中,有不少作者用这种方法研究多个周期解的存在性 . 现考虑较上述文献更一般的微分方程

$$x''(t)+f(t,x_t)\,|x'(t)|^n+a(t)x^3(t)+b(t)x^2(t)+c(t)x(t)=p(t)\quad(n>2)\tag{1}$$

其中 $f(t,\Phi,)$ 为 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{C}[-\tau,0]$ 上的连续函数,$a(t)$,$b(t)$,$c(t)$,$\tau(t)$,$p(t)$ 为 R 上的连续 ω - 周期函数,$n>2$ 为常数,利用 Mawhin 重合度理论及一些分析技巧,得到这类方程至少存在 3 个周期性解得充分条件。

1 预备知识

引入下列记号

$$\bar{g}=\frac{1}{\omega}\int_0^\omega g(t)\,\mathrm{d}t,\ g^L=\min_{t\in[0,\omega]}g(t),\ g^M=\max_{t\in[0,\omega]}g(t),$$

其中 g 是连续的 ω - 的周期函数,令

$$C_\omega^1=\{x\mid x\in C^1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}),x(t+\omega)=x(t)\},$$

其范数定义为

$$\|x\|1=\max\{|x|_\infty,|x'|_\infty\}=\max_{t\in[0,\omega]}|x(t)|.$$

又令

收稿日期:2012 - 01 - 05;**修回日期:**2012 - 03 - 02.
* **基金项目:**国家自然科学基金(11071001);安徽省教育厅重点项目(KJ2009A005Z);安徽大学学术创新团队项目(KJTD002B).
作者简介:周玲(1988-),女,安徽阜阳人,硕士研究生,从事泛函微分方程研究.

$$C_\omega = \{x \mid x \in C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}), x(t+\omega) = x(t)\},$$

其范数定义为

$$\|x\| = |x|_\infty.$$

易得,C_ω^1,C_ω 均为 Banach 空间.

为了讨论方程(1)的周期解的存在性,引入 Mawhin 重合度延拓定理[11].

设 X,Z 为 Banach 空间空间,$L:D(L)\subset X\to Z$ 为线性映射,如果 $\dim\mathrm{Ker}L=\mathrm{Codim}\,\mathrm{Im}L<+\infty$,且 $\mathrm{Im}L$ 为 Z 中闭子集,则称映射 L 为指标为零的 Fredholm 算子. 如果 L 是指标为零的 Fredholm 算子,$P:X\to X$,$Q:Z\to Z$ 为连续投影算子,满足 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$,$\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$,$X=\mathrm{Ker}L\oplus\mathrm{Ker}P$ 和 $Z=\mathrm{Im}L\oplus\mathrm{Im}Q$,则 $L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}P}$ 可逆,其逆映射记为 $K_p:\mathrm{Im}L\to\mathrm{Ker}P\cap D(L)$.

由于 $\mathrm{Im}Q$ 与 $\mathrm{Ker}L$ 同构,记同构映射 $J:\mathrm{Im}Q\to\mathrm{Ker}L$.

引理 1 设 L,P,Q 和 K_p 如上,又设 $\Omega\subset X$ 为一个有界开集,$N:X\to Z$ 在 $\overline{\Omega}$ 上为 L-紧的. 并且

(i) 对 $\forall\lambda\in(0,1)$,$x\in\partial\Omega\cap D(L)$,都有 $Lx\neq\lambda Nx$;

(ii) 对 $\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}L$,都有 $QNx\neq 0$;

(iii) $\deg\{JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}L,0\}\neq 0$

那么 $Lx=Nx$ 在 $\overline{\Omega}$ 上至少有一个解,取 $X=C_\omega^1$,$Z=C_\omega$ 定义线性子运算

$$L:D(L) = \{x:x\in C^2(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}) \mid \cap C_\omega^1\}\subset X\to Z, Lx = x^n$$

易得 $\mathrm{Ker}L=R$,$\mathrm{Im}L=\{x:x\in Z,\bar{x}=0\}$,因此可知 L 为指标为零的 Fredholm 算子。再定义投影算子 P,Q 分别为

$$P:X\to X,[Px](t) = x(0) = x(\omega);Q:Z\to Z,[Qx](t) = \bar{x}$$

则 $\mathrm{Im}P=\mathrm{Ker}L$,$\mathrm{Ker}Q=\mathrm{Im}L$. 令 $L_p=L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}P}$,则 L_p 可逆,其可逆为 $K_p:\mathrm{Im}L\to D(L)\cap\mathrm{Ker}P$ 且

$$[\mathrm{Kpy}](t) = -\frac{t}{\omega}\int_0^\omega(\omega-s)y(s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s$$

2 主要结果

为了便于叙述,记 $A(t)=b^2(t)-3a(t)c(t)$,$B(t)=b(t)c(t)+9a(t)p(t)$,$C(t)=c^2(t)+3b(t)p(t)$,$\triangle(t)=B^2(t)-4A(t)C(t)$,$\theta(t)=\arccos T(t)$,$T(t)=\dfrac{2A(t)b(t)-3a(t)B(t)}{3A^{\frac{3}{2}}}$

定理 1 设 $n>2$,又设

(H_1) $a^L>0$,$\triangle^M<0$,$|T(t)|<1$,$(b^M)^2-3a^Mc^M>0$,$b^M<0$,$C^L>0$

(H_2) $\exists\sigma>0$,满足 $|f(t,\Phi)|\geqslant\sigma$,$\forall(t,\Phi)\in R\times\boldsymbol{C}[-\tau,0]$.

则方程(1)至少存在 3 个 ω-周期解.

证明 令 $N:C_\omega^1\to C_\omega$,则

$$[Nx](t) = -[f(t,x_t)\,|x'(t)|^n + a(t)x^3(t) + b(t)x^2(t) + c(t)x(t)] + p(t).$$

则式(1)化为算子方程 $Lx=Nx$. 现在考虑方程 $Lx=\lambda Nx(\lambda\in(0,1))$,即

$$x''(t) + \lambda[f(t,x_t)[x'(t)]^n + a(t)x^3(t) + b(t)x^2(t) + c(t)x(t)] + \lambda p(t) \tag{2}$$

设 $x(t)\in X$ 为方程 $Lx=\lambda Nx(\lambda\in(0,1))$ 的任一解,选取 $t_1,s_1\in[0,\omega]$,使得

$$x(t_1) = \min_{t\in[0,\omega]}x(t), x(s_1) = \max_{t\in[0,\omega]}x(t).$$

则 $x'(t_1)=x'(s_1)=0$,$x''(t_1)\geqslant 0$,$x''(s_1)\leqslant 0$,于是式(2)可得

$$a(s_1)x(s_1)^3 + b(s_1)x(s_1)^2 + c(s_1)x(s_1) - p(s_1) \geqslant 0$$

解得

$$\frac{-b(s_1)-2A^{\frac{1}{2}}(s_1)\cos\frac{\theta(s_1)}{3}}{3a(s_1)}\leqslant x(s_1)\leqslant\frac{-b(s_1)-A^{\frac{1}{2}}(s_1)(\cos\frac{\theta(s_1)}{3}-3^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta(s_1)}{3})}{3a(s_1)}$$

或

$$x(s_1)\geqslant\frac{-b(s_1)+A^{\frac{1}{2}}(s_1)(\cos\frac{\theta(s_1)}{3}+3^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta(s_1)}{3})}{3a(s_1)}$$

易验证

$$u_1\leqslant x(s_1)\leqslant u_2,x(s_1)\geqslant u_3. \tag{3}$$

其中

$$u_1=\frac{-b^M-2\sqrt{(b^L)^2-3a^Lc^L}}{3a^M},u_2=\frac{-b^L-2\sqrt{(b^L)^2-3a^Lc^L}}{3a^L},u_3=\frac{-b^M-2\sqrt{(b^M)^2-3a^Lc^M}}{3a^M}$$

类似的 $x''(t)\geqslant 0$ 可得

$$a(t_1)x(t_1)^3+b(t_1)x(t_1)^2+c(t_1)x(t_1)-p(t_1)\leqslant 0$$

解得

$$x(t_1)\leqslant\frac{-b(t_1)-2A_{t_1}^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\theta_{t_1}}{3}}{3a(t_1)}$$

或

$$\frac{-b(t_1)+2A_{t_1}^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta(t_1)}{3}-3^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta(t_1)}{3}\right)}{3a(t_1)}\leqslant x(t_1)\leqslant\frac{-b(t_1)+2A_{t_1}^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\theta(t_1)}{3}+3^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\theta(t_1)}{3}\right)}{3a(t_1)}$$

易验证

$$x(t_1)\leqslant v_1,v_2\leqslant x(t_1)\leqslant v_3 \tag{4}$$

其中

$$v_1=\frac{-b^L-\sqrt{(b^M)^2-3a^Mc^M}}{3a^L},v_2=\frac{-b^M-\sqrt{(b^L)^2-3a^Lc^L}}{3a^M},v_3\frac{-b^L+\sqrt{(b^L)^2-3a^Lc^L}}{3a^L}.$$

由上述条件和(H_1)可知

$$u_1<x(t)<v_1,\forall t\in[0,\omega] \tag{5}$$

$$v_2<x(t)<u_2,\forall t\in[0,\omega] \tag{6}$$

$$u_3<x(t)<v_3,\forall t\in[0,\omega] \tag{7}$$

(Ⅰ)若式(5)成立,则可推得,存在常数 $M_1>0$(如取 $M_1=\max\{u_1,v_1\}$)使得

$$|x|_\infty<M \tag{8}$$

对式(2)两边积分得

$$\int_0^\omega[f(t,x_t)]|x'(t)|^n\mathrm{d}t+\int_0^\omega[a(t)x^3(t)+b(t)x^2(t)+c(t)x(t)]\mathrm{d}t-\int_0^\omega p(t)\mathrm{d}t=0. \tag{9}$$

由此得

$$\int_0^\omega|f(t,x_t)||x'(t)^n|\mathrm{d}t\leqslant\omega(|\bar{p}|+M_1^3\bar{a}+M_1^2|\bar{b}|+M_1\bar{c}).$$

由条件(H_2)可知

$$\sigma\int_0^\omega|x'(t)^n|\mathrm{d}t\leqslant\omega(|\bar{p}|+M_1^3\bar{a}+M_1^2|\bar{b}|+M_1\bar{c}).$$

即

$$\int_0^\omega |x'(t)^n|\mathrm{d}t \leqslant \frac{\omega}{\sigma}(|\bar{p}| + M_1^3\bar{a} + M_1^2|\bar{b}| + M_1\bar{c}).$$

因此

$$|x'|_\infty \leqslant \int_0^\omega |x''(t)\mathrm{d}t \leqslant fM_1 |\int_0^\omega |x'(t)^n|\mathrm{d}t + \omega(|\bar{p}| + M_1^3\bar{a} + M_1^2|\bar{b}| + M_1\bar{c}).$$

其中 $fM_1 = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} |f(t,\Phi)|$. 由前面的假设 $f(t,\Phi)$ 为连续函数,故其在有界闭集上有界,即 $fM_1 < \infty$. 因此,存在与 λ 无关的常数 $M_2 > 0$,使得

$$|x'|_\infty \leqslant M_2 \tag{10}$$

(Ⅱ) 若式(6)成立,则可推得,存在常数 $N_1 > 0$(如取 $N_1 = \max\{u_2, v_2\}$)使得

$$|x|_\infty < N_1. \tag{11}$$

对式(2)两边积分,同理可得

$$|x'|_\infty \leqslant \int_0^\omega |x''(t)\mathrm{d}t \leqslant fN_1 |\int_0^\omega |x'(t)^n|\mathrm{d}t + \omega(|\bar{p}| + N_1^3\bar{a} + N_1^2|\bar{b}| + N_1\bar{c})$$

其中 $fN_1 = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} |f(t,\Phi)|$ 同理可知,存在与 λ 无关的常数 $N_2 > 0$ 使得

$$|x'|_\infty \leqslant N_2. \tag{12}$$

(Ⅲ) 若式(7)成立,则可推得,存在常数 $L_1 > 0$(如取 $L_1 = \max\{u_3, v_3\}$)使得

$$|x|_\infty < L_1. \tag{13}$$

对式(2)两边积分,同理可得

$$|x'|_\infty \leqslant \int_0^\omega |x''(t)\mathrm{d}t \leqslant fL_1 |\int_0^\omega |x'(t)^n|\mathrm{d}t + \omega(|\bar{p}| + L_1^3\bar{a} + L_1^2|\bar{b}| + L_1\bar{c}).$$

其中 $fL_1 = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} |f(t,\Phi)|$. 同理可知,存在与 λ 无关的常数 $L_2 > 0$ 使得

$$|x'|_\infty \leqslant L_2. \tag{14}$$

现设 $x(t) \in \mathrm{Ker}L$ 且 $QNx = 0$ 则 $x(t) \equiv C$(常数),满足

$$\frac{1}{\omega}\left[\int_0^\omega a(t)C^3\mathrm{d}t + \int_0^\omega b(t)C^2\mathrm{d}t + \int_0^\omega c(t)C\mathrm{d}t - \int_0^\omega p(t)\mathrm{d}t\right] = 0.$$

即

$$\bar{a}C^3 + \bar{b}C^2 + \bar{c}C - \bar{p} = 0. \tag{15}$$

解得

$$C = c_1 = \frac{-\bar{b} - 2\bar{A}^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\bar{\theta}}{3}}{3\bar{a}},$$

或

$$C = c_2 = \frac{-\bar{b} + \bar{A}^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\bar{\theta}}{3} - 3^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\bar{\theta}}{3})}{3\bar{a}},$$

或

$$C = c_3 = \frac{-\bar{b} + \bar{A}^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\bar{\theta}}{3} + 3^{\frac{1}{2}}\sin\frac{\bar{\theta}}{3})}{3\bar{a}}.$$

易验证

$$u_1 < c_1 < v_1 < v_2 < c_2 < u_2 < u_3 < c_3 < v_3$$

取常数 r_1, r_2, r_3, r_4 满足 $v_1 < r_1 < r_2 < v_2 < u_2 < r_3 < r_4 < u_3$,再令

$$\Omega_1 = \{x: x \in X, \|x\|_1 < M_1 + M_2 + N_1 + N_2 + L_1 + L_2, \max_{t\in[0,\omega]} x(t) < r_1\},$$

$$\Omega_2 = \{x: x \in X, \|x\|_1 < M_1 + M_2 + N_1 + N_2 + L_1 + L_2, r_2 < \max_{t\in[0,\omega]} x(t) < r_3\},$$

$$\Omega_3 = \{x: x \in X, \|x\|_1 < M_1 + M_2 + N_1 + N_2 + L_1 + L_2, \max_{t\in[0,\omega]} x(t) > r_4\}.$$

显然 Ω_1 和 Ω_2 和 Ω_3 均为 X 的有限开集,且 $\Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega_3 \neq \phi$,由 N 的定义易知 N 在 $\Omega_i(i=1,2,3)$ 上均为 $L-$紧的。由式(16)可得 $x=c_1\in\Omega_1$,$x=c_2\in\Omega_2$ 和 $x=c_3\in\Omega_3$. 由于 $\mathrm{Ker}L\in R$,因此 $\partial\Omega_1\cap\mathrm{Ker}L=\{-(M_1+M_2+N_1+N_2+L_1+L_2),r_1\}$,$\partial\Omega_2\cap\mathrm{Ker}L=\{r_2,r_3\}$,$\partial\Omega_3\cap\mathrm{Ker}L=\{r_4,M_1+M_2+N_1+N_2+L_1+L_2\}$.

故 $c_i\notin\Omega_i\cap\mathrm{Ker}L(i=1,2,3)$. 所以,对 $\forall x\in\Omega_i\cap\mathrm{Ker}L(i=1,2,3)$ 均有 $NQx\neq0$. 又由式(8)、(10)、(11)、(12)、(13)、(14)可知,当 $x\in\Omega_i(i=1,2,3)$,对 $\forall \in(0,1)$,均有 $Lx\neq\lambda Nx$. 至此引理 1 中的条件(i)(ii)都已成立.

因为 $\mathrm{Im}Q=\mathrm{Ker}L=R$,所以可设 J 为自同构,根据式(15)计算可得 $\deg\{JNQ,\Omega_i\cap\mathrm{Ker}L,0\}=\mathrm{sgn}f'(c_i)\neq0(i=1,2,3)$.

综上所述,已经证明对于 $\Omega_i(i=1,2,3)$ 引理 1 中的条件都是成立的,因此,根据引理 1 可知式(1)在每一个 $\overline{\Omega}_i(i=1,2,3)$ 都至少有一个周期解,即式(1)至少存在 3 个周期解. 定理 1 得证.

参考文献:

[1] 任景莉,葛渭高. 一类二阶泛函微分方程周期解存在性问题[J]. 数学学报,2004,47(3):569-578

[2] 田德生,曾宪武. 一类二阶泛函微分方程多个周期解的存在性[J]. 数学物理学报,2010,30(2):525-530

[3] LI W G. Periodic solutions for 2kth order ordinary differential equation with resonance[J]. J Math Anal Appl,2001,259:157-167

[4] FU Z C,HUANG Q D,SHI S Y. Existence and uniqueness of periodic solutions for (2n+1)th order differential equations [J]. J Math Anal Appl,2000,241:1-9

[5] LIU Z L. Periodic solutions for nonlinear nth order ordinary differential equations[J]. J Math Anal Appl,1996,204:46-64

[6] ZHANG Z Q,WANG Z C. Periodic solution of a class of second order functional differential equations[J]. J Math Anal Appl, 2004,292:115-134

[7] MA R Y,CHEN R P,CHEN T L. Existence of periodic solutions of nonlinear first-order delayed differential equations[J]. J Math Anal Appl,2004,292:115-134

[8] GAINES R E,MAWHIN J L. Coincidence Degree and Non-linear Differential Equations[M]. Berlin:Spinger,1977

Existence of Periodic Solutions to a Class of Nonlinear Second-Order Differential Equations with Delays

ZHOU Ling, ZHOU Zong-fu

(School of Mathematical Sciences, Anhui University, Anhui Hefei 230039, China)

Abstract: By using the coincidence degree theory of Mawhin and some analytical skills, this paper studies the existence of periodic solutions to a class of nonlinear second order differential equations with delays as follows, $x''(t)+f(t,x_t)|x'(t)|^n+a(t)x^3(t)+b(t)x^2(t)+c(t)x(t)=p(t)(n>2)$, some sufficient theorems for the existence of at least three periodic solutions to this equation are given.

Key words: several periodic solutions; coincidence degree; delayed differential equation

责任编辑:田　静