文章编号:1672 - 058X(2012)05 - 0024 - 04

行正交矩阵的几点性质*

贾书伟, 王应选, 于海平
(西华大学 数学与计算机学院,成都 610039)

摘　要: 给出行正交矩阵和中心对称矩阵的概念,并讨论行正交矩阵的可逆性、中心对称性等问题;结果表明:行正交矩阵的转置矩阵仍是行正交矩阵;行正交矩阵是中心对称矩阵;行正交矩阵的转置矩阵以及它的行转置和列转置矩阵都是中心对称矩阵;其逆矩阵和伴随矩阵也是中心对称矩阵;若干个行正交矩阵的和仍是中心对称矩阵。

关键词: 矩阵;正交矩阵;行正交矩阵;中心对称矩阵

中图分类号: O151.21　　　　**文献标志码:** A

正交矩阵是一种特殊的矩阵,在矩阵理论体系中具有十分重要的作用。文献[1-3]讨论了正交矩阵和次正交矩阵的性质,文献[1]给出了广义次对称矩阵以及广义次正交矩阵的概念,并研究了它们之间的关系,文献[4]讨论了 k - 拟次正交矩阵的性质,文献[5]提出了右转置矩阵、左转置矩阵和全转置矩阵与正交矩阵的充要条件及一些相关的性质。近年来,一些矩阵论工作者对矩阵引入了行转置矩阵概念[6],并研究它的一些性质[6-8],进而又有矩阵论工作者讨论了矩阵的行正定性[9]和行正交性[10,11]问题。在此基础上,通过进一步的讨论,得到行正交矩阵的一些新的性质。规定 A^{-1}、A^{*}、A^{T}、$|A|$ 分别为矩阵 A 的逆矩阵,伴随矩阵,转置矩阵和行列式,$R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 实矩阵,N_{+} 表示正整数集合,E 表示 n 阶单位矩阵,$J_n = J$ 表示次对角线上元素全为 1,其余元素全为 0 的 n 阶方阵。

1　定义和引理

定义 1[6]　设 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$,则称:

$$A^{\mathrm{R}}=\begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \text{与 } A^{\mathrm{C}}=\begin{bmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots & a_{11} \\ a_{2n} & a_{2,n-1} & \cdots & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,n} & a_{m-1,n-1} & \cdots & a_{m-1,1} \\ a_{mn} & a_{m,n-1} & \cdots & a_{m1} \end{bmatrix}$$

分别为矩阵 A 的行转置矩阵与列转置矩阵,并记为 A^{R} 与 A^{C}。

若 $A^{\mathrm{R}}=A^{\mathrm{C}}$,则 A 称为行列对称矩阵。

收稿日期:2011 - 09 - 15;修回日期:2011 - 10 - 28.

* 基金项目:西华大学应用数学校重点学科资助项目(ZXD0910-09-1).

作者简介:贾书伟(1982-),男,河南平顶山人,助教,硕士,从事矩阵理论研究.

由定义不难得到:$J^{-1}=J^{T}=J,J^{R}=J^{C}=J^{2}=E$。

定义 2　设 $A\in R^{n\times n}$,若 $A^{R}A=AA^{R}=J$,则称 A 为行正交矩阵。

引理 1[8]　设 $A,B\in R^{m\times n}$,则有下列结论:

(1) $A^{R}=J_{m}A,A^{C}=AJ_{n}$;(2) $(A^{R})^{R}=A,(A^{C})^{C}=A$;(3) $(kA)^{R}=kA^{R},(kA)^{C}=kA^{C}\quad(k\in R)$;(4) $(A^{R})^{T}=(A^{T})^{C},(A^{C})^{T}=(A^{T})^{R}$;(5) $(A\pm B)^{R}=A^{R}\pm B^{R},(A\pm B)^{C}=A^{C}\pm B^{C}$;(6) 设 $B\in R^{n\times k}$,则 $(AB)^{R}=A^{R}B,(AB)^{C}=AB^{C}$。

引理 2[10]　设 $A\in R^{n\times n}$,且 A 可逆,则 $(A^{-1})^{R}=(A^{C})^{-1},(A^{-1})^{C}=(A^{R})^{-1}$。

引理 3[11]　设 $A\in R^{n\times n}$,如果 A 是行正交矩阵,那么:

(1) A,A^{R},A^{C} 都是可逆矩阵;(2) $A^{-1}=A,A^{R}=A^{C}$;(3) JA、AJ 都仍是行正交矩阵;(4) A^{-1} 是行正交矩阵;(5) A^{*} 是行正交矩阵。

定义 3[12]　如果 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,满足 $a_{ij}=a_{n-i+1,n-j+1}(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 A 为中心对称矩阵。

2　主要结果

定理 1　设 $A\in R^{n\times n}$,如果 A 是行正交矩阵,那么:

(1) $(A^{R})^{T}=(A^{T})^{R},(A^{C})^{T}=(A^{T})^{C}$;(2) $(A^{R})^{-1}=(A^{-1})^{R},(A^{C})^{-1}=(A^{-1})^{C}$。

证明　(1) 由引理 3 知 $A^{R}=A^{C}$,再由引理 1 得:$(A^{T})^{R}=(A^{C})^{T}=(A^{R})^{T}$,所以 $(A^{R})^{T}=(A^{T})^{R}$,类似的,可以证明 $(A^{C})^{T}=(A^{T})^{C}$;

(2) 由引理 2 和引理 3 可知 :$(A^{-1})^{R}=(A^{C})^{-1}=(A^{R})^{-1}$,即 $(A^{R})^{-1}=(A^{-1})^{R}$,类似的方法可以证明:$(A^{C})^{-1}=(A^{-1})^{C}$。

定理 2　设 $A\in R^{n\times n}$ 是行正交矩阵,那么:

(1) A^{T} 是行正交矩阵;(2) $A_{i}\in R^{n\times n}$ 为 n 阶行正交矩阵,且 A_{i} 两两可交换,$(i=1,2,\cdots,n)$ 则 $A_{1}A_{2}A_{3}\cdots A_{n},(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})^{R},(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})^{C}$ 都是行正交矩阵;(3) A^{m} 是行正交矩阵$(m\in N_{+})$。

证明　因 A 是 n 阶行正交矩阵,则有 $A^{R}A=AA^{R}=J$,结合引理 1 来证明以上结论:

(1) 由引理 1 和引理 3 可得 $A^{R}=A^{C},(A^{C})^{T}=(A^{T})^{R}$;从而:

$$(A^{T})^{R}A^{T}=(A^{C})^{T}A^{T}=(AA^{C})^{T}=(AA^{R})^{T}=J$$

$$A^{T}(A^{T})^{R}=A^{T}(A^{C})^{T}=(A^{C}A)^{T}=(A^{R}A)^{T}=J$$

所以

$$(A^{T})^{R}A^{T}=A^{T}(A^{T})^{R}=J$$

即 A^{T} 也是行正交矩阵。

(2) 因 $A_{i}\in R^{n\times n}$ 为 n 阶行正交矩阵,且 A_{i} 两两可交换,所以:

$(A_{1}A_{2}A_{3}\cdots A_{n})^{R}(A_{1}A_{2}A_{3}\cdots A_{n})=A_{1}^{R}A_{2}A_{3}\cdots A_{n}A_{1}A_{2}A_{3}\cdots A_{n}=A_{1}^{R}A_{2}A_{3}\cdots A_{1}A_{n}A_{2}A_{3}\cdots A_{n}=\cdots=(A_{1}^{R}A_{1})(A_{2}A_{2})(A_{3}A_{3})\cdots(A_{n}A_{n})=(JA_{2}A_{2})(A_{3}A_{3})\cdots(A_{n}A_{n})=(A_{2}^{R}A_{2})(A_{3}A_{3})\cdots(A_{n}A_{n})=(A_{3}^{R}A_{3})\cdots(A_{n}A_{n})=\cdots=(A_{n}^{R}A_{n})=J$;

$(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})^{R}=A_{1}A_{2}\cdots A_{n}A_{1}^{R}A_{2}\cdots A_{n}=\cdots=(A_{1}A_{1}^{R})(A_{2}A_{2})\cdots(A_{n}A_{n})=(JA_{2}A_{2})\cdots(A_{n}A_{n})=(A_{2}^{R}A_{2})\cdots(A_{n}A_{n})=\cdots=(A_{n}^{R}A_{n})=J$,

从而 $(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})^{R}(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})=(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})^{R}=J$。所以 $A_{1}A_{2}\cdots A_{n}$ 是行正交矩阵;类似地,可以证明 $(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})^{R},(A_{1}A_{2}\cdots A_{n})^{C}$ 也都是行正交矩阵。

(3) 由(2)的结论很容易得到。

定理 3　若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行正交矩阵,则 A 是中心对称矩阵。

证明 因为 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行正交矩阵,所以有 $A^{\mathrm{R}}A=AA^{\mathrm{R}}=J$,结合定义 1 得:

$$AA^{\mathrm{R}}=\begin{bmatrix}\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{1i}a_{n-j+1,1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{1i}a_{n-j+1,2} & \cdots & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{1i}a_{n-j+1,n-1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{1i}a_{n-j+1,n}\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{2i}a_{n-j+1,1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{2i}a_{n-j+1,2} & \cdots & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{2i}a_{n-j+1,n-1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{2i}a_{n-j+1,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{n-1,i}a_{n-j+1,1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{n-1,i}a_{n-j+1,2} & \cdots & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{n-1,i}a_{n-j+1,n-1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{n-1,i}a_{n-j+1,n}\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ni}a_{n-j+1,1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ni}a_{n-j+1,2} & \cdots & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ni}a_{n-j+1,n-1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ni}a_{n-j+1,n}\end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix}\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ni}a_{j1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ni}a_{j1} & \cdots & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ni}a_{j,n-1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ni}a_{jn}\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{n-1,i}a_{j1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{n-1,i}a_{j2} & \cdots & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{n-1,i}a_{j,n-1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{n-1,i}a_{jn}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{2i}a_{j1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{2i}a_{j2} & \cdots & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{2i}a_{j,n-1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{2i}a_{jn}\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{1i}a_{j1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{1i}a_{j2} & \cdots & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{1i}a_{j,n-1} & \sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{1i}a_{jn}\end{bmatrix}=A^{\mathrm{R}}A=J$$

在上式中:对应元素相等,并且次对角线上的每个元素都等于 1,

$$\text{从而有:}\begin{cases}a_{ni}a_{n-j+1,1}=a_{ni}a_{jn}\Rightarrow a_{n-j+1,1}=a_{jn}\\ a_{n-1,i}a_{n-j+1,2}=a_{n-1,i}a_{j,n-1}\Rightarrow a_{n-j+1,2}=a_{j,n-1}\\ \cdots\\ a_{2i}a_{n-j+1,n-1}=a_{2i}a_{j2}\Rightarrow a_{n-j+1,n-1}=a_{j2}\\ a_{1i}a_{n-j+1,n}=a_{1i}a_{j1}\Rightarrow a_{n-j+1,n}=a_{j1}\end{cases}$$

所以有:
$$a_{ji}=a_{n-j+1,n-i+1}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$
即有:
$$a_{ij}=a_{n-i+1,n-j+1}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

根据定义 3 可知 A 是中心对称矩阵。

推论 如果 $A_i\in R^{n\times n}$ 是行正交矩阵,$(i=1,2,\cdots,n)$,则 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i$ 仍是中心对称矩阵。

定理 4 若 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 是行正交矩阵,则:

(1) $A^{\mathrm{R}},A^{\mathrm{C}},A^{*}$ 都是中心对称矩阵;(2) $A^{-1},(A^{\mathrm{C}})^{-1},(A^{\mathrm{R}})^{-1}$ 也都是中心对称矩阵;(3) 如果 $A_i\in R^{n\times n}$ 是行正交矩阵,且 A_i 两两可交换,$(i=1,2,\cdots,n)$ 则 $A_1A_2A_3\cdots A_n,(A_1A_2\cdots A_n)^{\mathrm{R}},(A_1A_2\cdots A_n)^{\mathrm{C}}$ 都是中心对称矩阵;(4) A^{T},A^{m} 都是中心对称矩阵($m\in N_{+}$)。

证明 (1) 由引理 3 可知 $A^{\mathrm{R}},A^{\mathrm{C}},A^{*}$ 都是行正交矩阵,所以:$A^{\mathrm{R}},A^{\mathrm{C}},A^{*}$ 中心对称矩阵。

(2) 由引理 3 可知 $A^{-1}=A$,由定理 1 可知 $(A^{-1})^{\mathrm{R}}=(A^{\mathrm{R}})^{-1}$

所以:
$$(A^{-1})^{\mathrm{R}}A^{-1}=(A^{\mathrm{R}})^{-1}A^{-1}=(AA^{\mathrm{R}})^{-1}=J$$
$$A^{-1}(A^{-1})^{\mathrm{R}}=A^{-1}(A^{\mathrm{R}})^{-1}=(A^{\mathrm{R}}A)^{-1}=J$$

所以:　$(A^{-1})^{R}A^{-1}=A^{-1}(A^{-1})^{R}=J$,即:$A^{-1}$是行正交矩阵。

$$[(A^{R})^{-1}]^{R}(A^{R})^{-1}=[(A^{-1})^{R}]^{R}(A^{-1})^{R}=(A^{-1})(A^{-1})^{R}=J$$

$$(A^{R})^{-1}[(A^{R})^{-1}]^{R}=(A^{-1})^{R}[(A^{-1})^{R}]^{R}=(A^{-1})^{R}(A^{-1})=J$$

所以:　$[(A^{R})^{-1}]^{R}(A^{R})^{-1}=(A^{R})^{-1}[(A^{R})^{-1}]^{R}=J$,即:$(A^{R})^{-1}$是行正交矩阵。

同理:$(A^{C})^{-1}$也是行正交矩阵。从而:A^{-1},$(A^{C})^{-1}$,$(A^{R})^{-1}$也都是中心对称矩阵。

(3) 由定理 2 可知;当 $A_i\in R^{n\times n}$ 为 n 阶行正交矩阵,且 A_i 两两可交换时,$A_1A_2A_3\cdots A_n$,$(A_1A_2\cdots A_n)^{R}$,$(A_1A_2\cdots A_n)^{C}$ 都是行正交矩阵,所以,也是中心对称矩阵。

(4) 由定理 2 知 A^{T},A^{m} 是行正交矩阵($m\in N_+$),所以,也是中心对称矩阵。

参考文献:

[1] 刘志明. 关于正交矩阵性质的讨论[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版,2000,17(2):162-164

[2] 郭华. 强亚次正交矩阵[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2008,25(5):445-448

[3] 陈琳. 亚次正交矩阵及性质[J]. 周口师范学院学报,2004,21(5):28-30

[4] 刘玉,蔡乌芳. *K*-次正交矩阵及其性质[J]. 南通大学学报:自然科学版,2009,8(1):72-75

[5] 许永平,石小平. 正交矩阵的充要条件与 *O* 正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报:自然科学版,2005,29(2):54-56

[6] 袁晖坪. 行(列) 对称矩阵的 Schur 分解和正规阵分解[J]. 山东大学学报:理科版,2007,42(10):123-126

[7] 贾书伟,何承源. 行(列)转置矩阵的性质[J]. 内江师范学院学报:自然科学版,2011,26(2):14-16

[8] 贾书伟,何承源. 行(列)转置矩阵的性质[J]. 内江师范学院学报:自然科学版,2011,26(2):14-16

[9] 何承源,凃淑恒. 实矩阵的行正定性[J]. 西华大学学报:自然科学版,2010,29(5):49-50

[10] 贾书伟,何承源. 行正交矩阵的一些性质[J]. 西南民族大学学报:自然科学版,2011,37(1):71-74

[11] 贾书伟. K-行正交矩阵的几点性质[J]. 河南城建学院学报:自然科学版,2011,20(1):66-67

[12] 黄敬频. 中心对称矩阵的 Drazin 逆[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版,1999,16(1):64-68

Several Properties of Row Orthogonal Matrix

JIA Shu-wei, WANG Ying-xuan, YU Hai-ping

(School of Mathematics and Computer Engineering, Xihua University, Sichuan Chengdu 610039, China)

Abstract: This paper gives the concept of row orthogonal matrix and center symmetric matrix, discusses the reversibility of row orthogonal matrix, center symmetry and so on, and comes to the conclusions that the transpose matrix of row orthogonal matrix is still row orthogonal matrix, that row orthogonal matrix is center symmetric matrix, that the transpose matrix of row orthogonal matrix and its row transpose matrix and column transpose matrix are center symmetric matrix, that its reverse matrix and its accompanying matrix are also center symmetric matrix, the sum of many row orthogonal matrices is still center symmetric matrix.

Key words: matrix; orthogonal matrix; row orthogonal matrix; center symmetric matrix

责任编辑:田　静