文章编号:1672 - 058X(2012)05 - 0013 - 05

具有软位势的 Boltzmann 方程的 L^1 稳定性*

晋守博[a,b], 张正林[b]
(宿州学院 a. 智能信息处理实验室;b. 数学与统计学院,安徽 宿州 23400)

摘　要:Boltzman 方程是统计力学中最重要的方程之一,描述了经典粒子系统随时间变化的规律,讨论了具有软位势的 Boltzmann 方程的 L^1 稳定性,这种方程的碰撞算子具有很强的奇异性,主要通过 Gronwall 不等式来处理由软位势带来的奇异性.

关键词:Boltzmann 方程;稳定性;软位势
中图分类号:O175.26　　**文献标志码**:A

Boltzmann 方程是稀薄气体动力学中的重要方程之一,它描述了经典粒子系统的真实行为. 目前,关于 Boltzmann 方程初边值问题的研究已经取得了许多很好的结果[1-4]. 对于空间均匀的情况,Arkeryd 证明了 Boltzmann 方程的解的李雅普诺夫型加权 L^1 稳定性[5];对于空间不均匀的情况,Ha 使用李雅普诺夫函数得到了 Boltzmann 方程的一致 L^1 稳定性和 BV 型估计[6]. 最近,文献[7]讨论了具有硬位势的 Boltzmann 方程的经典解的 L^1 稳定性,文献[8]将上述结果推广到了非弹性碰撞情况,分析了具有非弹性碰撞的 Boltzmann 方程的 L^1 稳定性,然而,文献[7]和文献[8]都集中在具有硬位势的 Boltzmann 方程的稳定性,没有讨论具有软位势的 Boltzmann 方程的 L^1 稳定性,此处将采用文献[7]和文献[9]的方法分析具有软位势的 Boltzmann 方程的 L^1 稳定性. 在空间不均匀的情况下,Boltzmann 方程具有下面形式:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v)+v\cdot\nabla_x f(t,x,v)=Q(f,f)(t,x,v) \tag{1}$$

方程的初始条件为:

$$f(0,x,v)=f_0(x,v) \tag{2}$$

方程(1)中的 $f(t,x,v)$ 表示在 t 时刻点 x 处速度为 v 的粒子的密度分布函数,碰撞算子 $Q(f,f)(t,x,v)$ 描述了粒子双边碰撞的情况,可以表示为

$$Q(f,f)(t,x,v)=Q_+(f,f)-fR(f) \tag{3}$$

$$Q(f,f)(t,x,v)=\int_{S_+^2\times R_{v3_*}}|v-v_*|^{\delta}f(t,x,v')f(t,x,v_*')\,\mathrm{d}w\mathrm{d}v_* \tag{4}$$

$$fR(f)(t,x,v)=\int_{S_+^2\times R_{v3_*}}|v-v_*|^{\delta}f(t,x,v)f(t,x,v_*)\,\mathrm{d}w\mathrm{d}v_* \tag{5}$$

这里的 (v,v_*) 和 (v',v'_*) 分别表示两粒子弹性碰撞前后所具有的速度,它们遵循如下碰撞法则:

收稿日期:2011 - 07 - 15;**修回日期**:2011 - 10 - 13.
* **基金项目**:宿州学院智能信息处理实验室开放课题(2011YKF12); 宿州学院硕士科研启动基金(2008yss23).
作者简介:晋守博(1980-),男,河南洛阳人,硕士,讲师,从事数学物理方程研究.

$$v' = v - (v - v_*, w)w, v'_* = v_* + (v - v_*, w)w \tag{6}$$

当 $0<\delta\leqslant 1$ 时,称方程(1)为具有硬位势的 Boltzmann 方程,当 $\delta=0$ 时,称方程(1)为具有 Maxwell 形式的 Boltzmann 方程,当 $-2<\delta<0$ 时,称方程(1)为具有软位势的 Boltzmann 方程. 在具有软位势的情况下,由于 $|v-v_*|^{\delta}$ 在 $v=v_*$ 处具有很强的奇异性,使得碰撞算子 $Q(f,f)$ 变得极为复杂,因此这方面的研究工作相对较少,此处主要利用 Gronwall 不等式来处理由软位势导致的奇异性,为了讨论具有软位势的 Boltzmann 方程的 L^1 稳定性,首先给出下面引理. 需要指出的是文中不同公式中的 C 代表不同的正常数.

引理 1 对任意 $p>0$,当 $-3<\delta\leqslant 0$ 时,必存在常数 $C>0$,使得:

$$\sup_v \int_{R^3} |v-u|^{\delta} \mathrm{e}^{-p|u|^2} \mathrm{d}u \leqslant C \tag{7}$$

证明 对任意 $p>0$,有

$$\begin{aligned}
\int_{R^3} |v-u|^{\delta} \mathrm{e}^{-p|u|^2} \mathrm{d}u &= \int_{|v-u|\leqslant 1} |v-u|^{\delta} \mathrm{e}^{-p|u|^2} \mathrm{d}u + \int_{|v-u|\geqslant 1} |v-u|^{\delta} \mathrm{e}^{-p|u|^2} \mathrm{d}u \leqslant \\
&\int_{|v-u|\leqslant 1} |v-u|^{\delta} \mathrm{e}^{-p|u|^2} \mathrm{d}u + \int_{|v-u|\geqslant 1} \mathrm{e}^{-p|u|^2} \mathrm{d}u \leqslant \\
&\int_{|v-u|\leqslant 1} |v-u|^{\delta} \mathrm{e}^{-p|u|^2} \mathrm{d}u + C_1 \leqslant \\
&\int_{|v-u|\leqslant 1} |v-u|^{\delta} \mathrm{d}u + C_1 = \\
&4\pi \int_0^1 r^{\delta+2} \mathrm{d}r + C_1
\end{aligned}$$

由 $-3<\delta\leqslant 0$ 可知 $-1<\delta+2\leqslant 2$,于是 $\int_0^1 r^{\delta+2}\mathrm{d}r = \dfrac{1}{\delta+3}$, 所以

$$\sup_v \int_{R^3} |v-u|^{\delta} \mathrm{e}^{-p|u|^2} \mathrm{d}u \leqslant C$$

为了计算方便,可以引入下面几个记号

$$H(f,g)(t,x,v) = [Q_+(f,g) + fR(g) + Q_+(g,f) + gR(f)](t,x,v)$$

$$f^{\#}(t,x,v) = f(t,x+vt,v), S(t) = \int_{R_x^3\times R_v^3} |f-g|^{\#}(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$$

$$\Lambda_{\delta}(t) = \int_{R_x^3\times R_v^3\times R_{v_*}^3} |v-v_*|^{\delta} |f-g|(t,x,v)(f+g)(t,x,v_*)\mathrm{d}x\mathrm{d}v\mathrm{d}v_*$$

定理 1 设 $f(t,x,v)$ 和 $g(t,x,v)$ 为方程(1)的两个经典解,其初值分别为:$f(0,x,v)=f_0(x,v)$ 和 $g(0,x,v)=g_0(x,v)$,如果对任意 $t\geqslant 0$,f 和 g 满足:

$$f^{\#}(t,x,v) \leqslant M\mathrm{e}^{-p|x|^2}\mathrm{e}^{-q|x|^2}, g^{\#}(t,x,v) \leqslant M\mathrm{e}^{-p|x|^2}\mathrm{e}^{-q|x|^2} \tag{8}$$

其中 $p,q,M>0$,则当 $-2<\delta\leqslant 0$ 时,必存在常数 $C>0$,使得:

$$\| f(t) - g(t) \|_{L^1(R_x^3\times R_v^3)} \leqslant C \| f_0 - g_0 \|_{L^1(R_x^3\times R_v^3)}$$

证明 由于 $f(t,x,v)$ 和 $g(t,x,v)$ 为方程(1)的两个经典解,所以:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x,v) + v\cdot\nabla_x f(t,x,v) = Q(f,f)(t,x,v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t,x,v) + v\cdot\nabla_x g(t,x,v) = Q(g,g)(t,x,v)$$

两式想减并乘以 $\mathrm{sgn}(f-g)$ 可得:

$$\frac{\partial|f-g|}{\partial t}(t,x,v)+v\cdot\nabla_x|f(t,x,v)-g(t,x,v)|\leqslant H(|f-g|,f)(t,x,v)$$

变换 f 和 g 的位置又可以得到:

$$\frac{\partial|g-f|}{\partial t}(t,x,v)+v\cdot\nabla_x|g(t,x,v)-f(t,x,v)|\leqslant H(|g-f|,g)(t,x,v)$$

将上述结果综合可得:

$$\frac{\partial|f-g|}{\partial t}(t,x,v)+v\cdot\nabla_x|f(t,x,v)-g(t,x,v)|\leqslant \frac{1}{2}H(|f-g|,f+g)(t,x,v)$$

于是,利用 $f^{\#}(t,x,v)$ 的定义可知:

$$\frac{\partial|f-g|^{\#}}{\partial t}(t,x,v)\leqslant \frac{1}{2}H^{\#}(|f-g|,f+g)(t,x,v)$$

方程对 $R_x^3\times R_v^3$ 积分可得:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\frac{1}{2}\|H^{\#}(|f-g|,f+g)(t,x,v)\|_{L^1(R_x^3\times R_v^3)}\leqslant$$

$$C_1\int_{R_x^3\times R_v^3\times R_{v*}^3}|v-v_*|^{\delta}|f-g|(t,x,v)(f+g)(t,x,v_*)\mathrm{d}x\mathrm{d}v\mathrm{d}v_*=C_1\Lambda_\delta(t)$$

下面对 $\Lambda_\delta(t)$ 进行估计,利用式(8)可得:

$$\Lambda_\delta(t)=\int_{R_x^3\times R_v^3}|f-g|(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v\int_{R_{v*}^3}|v-v_*|^{\delta}(f+g)(t,x,v_*)\mathrm{d}v_*\leqslant$$

$$2M\int_{R_x^3\times R_v^3}|f-g|(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v\int_{R_{v*}^3}|v-v_*|^{\delta}\mathrm{e}^{-p|x-v_*t|^2}\mathrm{e}^{-q|v_*|^2}\mathrm{d}v_*$$

当 $t>0$ 时,由引理 1 和 $\mathrm{e}^{-p|x-v_*t|^2}\leqslant 1$,可知

$$\int_{R_{v*}^3}|v-v_*|^{\delta}\mathrm{e}^{-p|x-v_*t|^2}\mathrm{e}^{-q|v_*|^2}\mathrm{d}v_*\leqslant\int_{R_{v*}^3}|v-v_*|^{\delta}\mathrm{e}^{-q|v_*|^2}\mathrm{d}v_*\leqslant C_2$$

当 $t>1$ 时,令 $v_*t=\bar{v}$,再次利用引理 1 可得:

$$\int_{R_{v*}^3}|v-v_*|^{\delta}\mathrm{e}^{-p|x-v_*t|^2}\mathrm{e}^{-q|v_*|^2}\mathrm{d}v_*\leqslant\int_{R_{v*}^3}|v-v_*|^{\delta}\mathrm{e}^{-p|x-v_*t|^2}\mathrm{d}v_*=$$

$$\frac{1}{t^{3+\delta}}\int_{R_{\bar{v}}^3}|vt-\bar{v}|^{\delta}\mathrm{e}^{-p|x-\bar{v}|^2}\mathrm{d}\bar{v}=\frac{1}{t^{3+\delta}}\int_{R_{\bar{v}}^3}|x-vt-u|^{\delta}\mathrm{e}^{-p|u|^2}\mathrm{d}u\leqslant\frac{C_3}{t^{3+\delta}}$$

从而将 $t>0$ 和 $t>1$ 的两种情况结合可得:

$$\sup_v\int_{R_{v*}^3}|v-v_*|^{\delta}\mathrm{e}^{-p|x-v_*t|^2}\mathrm{e}^{-q|v_*|^2}\mathrm{d}v_*\leqslant\frac{C_4}{(1+t)^{3+\delta}}$$

将上述结论代人 $\Lambda_\delta(t)$ 可得:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t}\leqslant\frac{C_5}{(1+t)^{3+\delta}}S(t)$$

利用 Gronwall 不等式可以得到:

$$S(t)\leqslant\exp\left\{\frac{1}{(-\delta-2)(1+t)^{\delta+2}}C_5\right\}S(0)$$

由于 $\delta>-2$,所以 $\delta+2>0$,于是,对任意 $t>0$,存在常数 $C>0$,使得 $S(t)\leqslant CS(0)$.

因为 $\int_{R_x^3\times R_v^3}f^{\#}(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v=\int_{R_x^3\times R_v^3}f(t,x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v$, 所以对任意 $t>0$,有:

$$\| f(t) - g(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)} \leqslant C \| f_0 - g_0 \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}$$

值得注意的是,方程(1)的解除了上述 L^1 稳定性之外,利用定理1的证明方法还可以得到下面的BV型估计.

定理2 除定理1条件外,如果对任意 $t \geqslant 0$,有 $\nabla_x f(t,x,v) \leqslant M\mathrm{e}^{-p|x|^2}\mathrm{e}^{-q|x|^2}$,则方程(1)的解有BV型估计 $\| \nabla_x f(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)} \leqslant C \| \nabla_x f(0) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}$. 其中 $\| \nabla_x f(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)} = \sum_{i=1}^{3} \| \partial_{x_i} f(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}$.

证明 对方程(1)两边关于 $x_i(i=1,2,3)$ 求偏导得:

$$\frac{\partial(\partial_{x_i} f)}{\partial t} + v \cdot \nabla_x(\partial_{x_i} f) = Q(\partial_{x_i} f, f) + Q(f, \partial_{x_i} f)$$

利用 $f^{\#}(t,x,v)$ 的定义可得:$\dfrac{\partial(|\partial_{x_i} f|^{\#})}{\partial t}(t,x,v) \leqslant H^{\#}(|\partial_{x_i} f|, f)(t,x,v)$.

不等式两边在 $R_x^3 \times R_v^3$ 上积分可得:$\dfrac{\mathrm{d} \| \partial_{x_i} f(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}}{\mathrm{d}t} \leqslant \| H^{\#}(|\partial_{x_i} f|, f)(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}$.

类似定理的证明可得:$\| H^{\#}(|\partial_{x_i} f|, f)(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)} \leqslant \dfrac{C_6}{(1+t)^{3+\delta}} \| \partial_{x_i} f(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}$. 从而 $\dfrac{\mathrm{d} \| \nabla_x f(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}}{\mathrm{d}t} \leqslant \dfrac{C_7}{(1+t)^{3+\delta}} \| \nabla_x f(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}$. 利用Gronwall不等式可得:

$$\| \nabla_x f(t) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)} \leqslant C \| \nabla_x f(0) \|_{L^1(R_x^3 \times R_v^3)}$$

参考文献:

[1] LI H L, TOSCANI G. Long-time asymptotics of kinetic models of granular flows[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2004, 172(3): 407-428

[2] JIN SH B, CHEN P F. Stability of Dissipative Boltzmann equation for one dimensional granular gases[J]. Annals of Differential Equation, 2011, 27(2): 145-149

[3] 魏金波,张显文. Boltzmann方程的永久型解[J]. 数学物理学报, 2007, 27(2): 240-247

[4] 晋守博,肖志涛,张光辉. 广义Kac方程的解的渐近稳定性[J]. 大学数学, 2010, 26(4): 21-25

[5] ARKERYD L. Stability in L_1 for the spatially homogeneous Boltzmann equation[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1988, 103: 151-168

[6] HA S Y. Nonlinear functionals of the Boltzmann equation and uniform stability estimates[J]. Journal of Differential Equation, 2005, 215: 178-205

[7] HA S Y. L_1 Stability of Boltzmann equation for the hard sphere model[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 2004, 173: 279-296

[8] WU ZH G. L_1 and BV-type stability of the inelastic Boltzmann equation near vacuum[J]. Continuum Mech Thermodyn, 2010, 22: 239-249

[9] DUAN R J, YANG T, ZHU CH J. L_1 and BV-type stability of Boltzmann equation with external forces[J]. Journal of Differential Equations, 2006, 227(1): 1-28

L^1 Stability of the Boltzmann Equation with Soft Potentials

JIN Shou-bo[a,b], ZHANG Zheng-lin[b]

(a. Laboratory of Intelligent Information Processing;

b. School of Mathematics and Statistics, Suzhou University, Anhui Suzhou 234000, China)

Abstract: The Boltzmann equation is one of the most important equations in statistical mechanics, which describes the change of the rule of a system of classical particles with time. L^1 stability of the Boltzmann equation with soft potentials is discussed in this paper. It is well known that the collision operator of the equation has strong singularity, this paper mainly uses the Gronwall inequality to deal with the singularity from the soft potentials.

Key words: Boltzmann equation; stability; soft potentials

责任编辑:李翠薇

(上接第 5 页)

Polarization Properties of Limited Cycle 1-D Square Photonic Crystal Waveguide

LIU Qi-neng

(School of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Based on the horizontal limited conditions of light waves in limited cycle 1-D square photonic crystal waveguide, the relation expression fitting for all transmission modes of the two polarized lights such as TE wave and TM wave in limited cycle 1-D square photonic crystal waveguide is derived and the changing laws for cycle number, mode quantum number and side length of the bandgap for transmitting all kinds of modes of TE wave and TM wave are studied.

Key words: photonic crystal waveguide; polarized light; mode; bandgap

责任编辑:田　静