

文章编号:1672-058X(2012)04-0050-04

MATLAB 在重积分计算中的应用*

仇海全, 潘 花

(安徽科技学院理学院 数学系, 安徽 凤阳 233100)

摘 要:重积分是高等数学教学的重点和难点,特别是重积分的计算比较复杂,其中涉及积分区域的确定、交换积分次序等;Matlab 软件在求解重积分的数值解方面有较大优势,其函数库中包含了求解简单重积分的函数;对复杂的积分,可以先利用 Matlab 绘制出积分区域,确定积分区域类型,再利用相应函数进行求解;针对二重积分和三重积分的几种不同情况利用 Matlab 进行了实例说明,并给出了相应的程序;Matlab 操作和演示较为方便,在辅助重积分教学方面优势明显。

关键词:Matlab;重积分计算;积分区域;投影区域

中图分类号:O172

文献标志码:A

重积分是高等数学多元函数积分学中的重要内容。重积分计算的思想是化重积分为二次积分或三次积分^[1],关键是选择适当的坐标系、确定恰当的积分次序和积分限。当积分区域比较复杂时,运用传统的板书教学方法很难形象、直观的进行讲解。而利用 MATLAB 软件作为辅助教学工具,可以精确画出积分区域,形象直观,便于教师讲解和学生理解^[2],不仅能够提高学生的学习兴趣,还可以增强学生的空间想象能力,提高学习效率。

1 直接利用 MATLAB 函数计算重积分

当重积分的积分区域比较简单时,可以直接调用 MATLAB 中的函数来计算重积分。

1.1 二重积分的数值解

MATLAB 提供了直接计算二重积分的 `dblquad` 函数^[3]。需要注意的是该函数只能求解矩形区域 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ 上的二重积分,而不能求解任意平面闭区域上的二重积分。

例 1 求 $I = \iint_D xy(3x + 2y) dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 3\}$ 。

解 积分区域为矩形区域,可直接调用 `dblquad` 函数进行求解,代码如下:

```
f = inline('x.*y.*(3.*x+2.*y)'); I = dblquad(f,0,1,1,3);
```

运行结果: $I = 12.6667$ 。

1.2 三重积分的数值解

长方体闭区域 $\Omega = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$ 上的三重积分可以直接调用 MATLAB 提供的

收稿日期:2011-05-19;修回日期:2011-12-07.

* 基金项目:安徽科技学院教学研究项目(X201056).

作者简介:仇海全(1982-),男,山东沂水人,硕士,从事高等数学、数学建模的教学与研究.

triplequad 函数^[3]。

例2 求 $I = \iiint_{\Omega} (y \cos x + z \sin x) dx dy dz$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1\}$ 。

解 积分区域为长方体闭区域, 直接调用 triplequad 函数进行计算, 代码如下:

```
f=@(x,y,z)y*cos(x)+z*sin(x); I=triplequad(f,0,pi,0,2,-1,1)
```

程序运行结果为 $I = 2.2204e - 016$ 。

2 利用 MATLAB 绘图函数绘出积分区域再计算重积分

当积分区域比较复杂时, 先用 MATLAB 绘制出积分区域, 再调用相应函数来计算重积分。

2.1 二重积分的计算

计算二重积分, 首先要选择适当的坐标系, 需要从被积函数和积分区域两个方面进行考虑。一般情况下, 积分区域的边界由直线段或抛物线等曲线构成时, 通常采用直角坐标计算。若积分区域为圆域、扇形域、圆环域时, 特别是被积函数为 $f(x^2 + y^2)$ 或 $g(y/x)$ 时, 采用极坐标计算二重积分比较方便。对于一般平面闭区域上二重积分的计算, 首先要正确画出积分区域, 然后确定积分限, 最后通过调用 int 函数来计算二重积分。

例3 求 $I = \iint_D \arctan \frac{y}{x} dx dy$, 其中 D 由 $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 = 4$ 及直线 $y = x$, $y = 0$ 所围成的在第一象限内的闭区域。

解 用极坐标计算该二重积分, 绘制积分区域 D 的代码如下:

```
x = -5:0.01:5; y = x;
hold on
text(2,2.6,'y=x');
plot(x,y);
a=0:0.01:2*pi;x1=4*cos(a);y1=4*sin(a);
plot(x1,y1,'-r');
x2=2*cos(a);y2=2*sin(a);
plot(x2,y2);
text(sqrt(15),1,'x^2+y^2=16'); y3=0; x3=0;
plot(x,y3,'-k'); plot(x3,x,'k');
text(sqrt(3),1,'x^2+y^2=4'); text(3,-0.2,'y=0');
text(3,1.5,'D');
hold off
```

程序运行结果如图 1 所示。

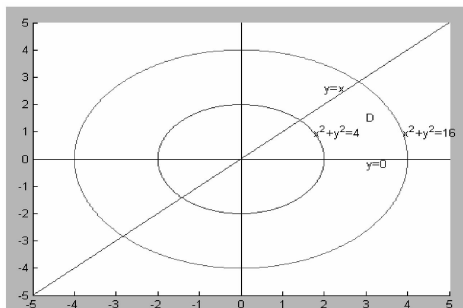


图1 例3中的积分区域 D

将原积分化为极坐标表示: $I = \iint_D \arctan \frac{\rho \sin \theta}{\rho \cos \theta} \rho d\rho d\theta = \iint_D \theta \rho d\rho d\theta$, 其中积分区域转化为 $D = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \pi/4, 2 \leq \rho \leq 4\}$ 。通过两次调用 int 函数计算该二重积分:

```
syms r theta; f = r * theta; I1 = int(f, r, 2, 4); I = int(I1, theta, 0, pi/4)。
```

程序运行结果为 $I = 3/16 * \pi^2$ 。

2.2 三重积分的计算

三重积分的计算是高等数学的一个难点^[4], 要求学习者既要有较强的几何直观能力, 能够画出积分区域的图形, 又能灵活地选择计算方法和计算公式, 简化计算。

例 4^[4] 利用柱面坐标计算 $\iiint_{\Omega} z e^{x^2+y^2} dx dy dz$, Ω 为 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及 $z = h (h > 0)$ 围成的区域。

解 首先绘制积分区域 Ω , 代码如下:

```
x = -2:0.08:2; y = -2:0.08:2;
[X, Y] = meshgrid(x, y);
Z1 = sqrt(X.^2 + Y.^2); Z2 = 2 * ones(size(X));
mesh(X, Y, Z1); text(1, 2, 2.8, 'z = sqrt(x^2 + y^2)');
hold on
plot3(X, Y, Z2, 'b-');
text(2, -2, 2, 'z = 2'); text(0, 0, 1, '积分闭区域'); hidden off
```

程序运行结果经一定旋转后如图 2 所示。

若要绘制积分区域边界曲面的交线及其在 xoy 坐标面上的投影^[5], 只需添加如下代码:

```
s = abs(Z1 - Z2) == 0;
xx = s * X; yy = s * Y; zz = s * Z2;
plot3(xx(s == 0), yy(s == 0), zz(s == 0), 'b*');
t = zeros(size(yy(s == 0)));
plot3(xx(s == 0), yy(s == 0), t, 'r*');
text(0, -1, 0, '投影区域'); 运行结果经旋转后如图 3 所示。
```

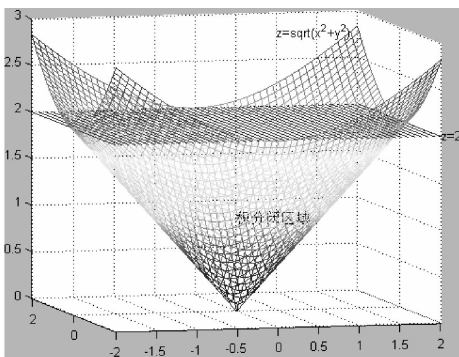


图 2 例 5 中积分区域 Ω

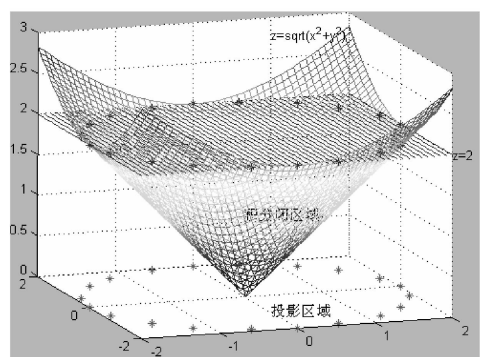


图 3 Ω 的投影区域

它们的交线为圆, 变量 $z \in [0, h]$, 故可用截面法(先二后一法)来计算该三重积分。把原三重积分化为在柱面坐标下的表示, 并把截面表示为 $D_z = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq z\}$, 则有 $\iiint_{\Omega} z e^{x^2+y^2} dx dy dz =$

$\iiint_{\Omega} z e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta dz = \int_0^h dz \iint_{D_z} z e^{\rho^2} \rho d\rho d\theta$, 计算该三重积分的代码为

```
syms r h z theta; f = z * r * exp(r * r); I1 = int(f, r, 0, z); I2 = int(I1, theta, 0, 2 * pi); I = int(I2, z,
```

0, h), 程序运行结果为 $I = 1/2 * \pi * \exp(h^2) - 1/2 * h^2 * \pi - 1/2 * \pi$ 。

例5^[6] 计算 $\iiint_{\Omega} y dv$, Ω : 由曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 和 $z = 2 - x^2$ 所围的闭区域。

解 联立 $z = x^2 + 2y^2$ 和 $z = 2 - x^2$, 得两曲面的交线 $x^2 + y^2 = 1$, 它在 xoy 坐标面上的投影是以原点为圆心, 半径为1的一个圆, 可用投影法(先-后二法) 计算该三重积分, 将 Ω 在 xoy 坐标面上的投影区域记为 $D_{xy} = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ 。在 D' 上绘制题中两个曲面, 其中 $D' = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, 可得积分区域。具体代码如下:

```
x = -1:0.1:1; y = -1:0.1:1;
[X, Y] = meshgrid(x, y);
Z1 = X.^2 + 2 * Y.^2;
mesh(X, Y, Z1);
hold on
Z2 = 2 - X.^2;
mesh(X, Y, Z2);
hidden off;
text(1, 1, 3, 'z = x^2 + 2y^2'); text(1, 1, 1, 'z = 2 - x^2'); text(0, 0, 1, '积分闭区域');
hold off;
```

运行结果经旋转后如图4所示, 可见在积分区域中曲面 $z = 2 - x^2$ 在曲面 $z = x^2 + 2y^2$ 的上方。

若要绘制两曲面的交线及其在 xoy 坐标面上的投影, 只需在上述程序中加入如下语句:

```
r = abs(Z1 - Z2) == 0;
xx = r * X; yy = r * Y; zz = r * Z1; plot3(xx(r == 0), yy(r == 0), zz(r == 0), 'k * ');
plot3(xx(r == 0), yy(r == 0), zeros(size(xx(r == 0))), 'r * '); text(0.5, 0.5, '投影区域 Dxy');
```

程序运行结果经一定旋转后如图5所示。计算此三重积分的代码为

```
syms x y z; I1 = int(y, z, x^2 + 2 * y^2, 2 - x^2); I2 = int(I1, y, -sqrt(1 - x^2), sqrt(1 - x^2)); I3 = int(I2, x, -1, 1);
```

程序运行结果: $I = 0$ 。

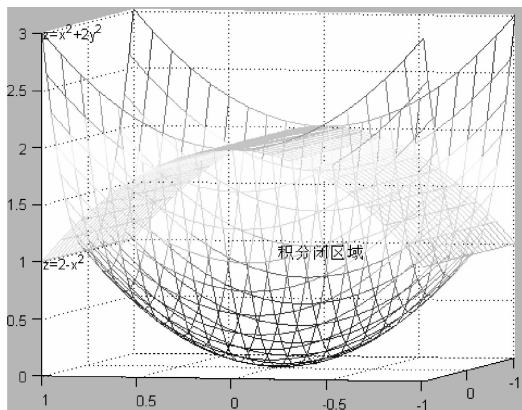


图4 例6中积分区域图

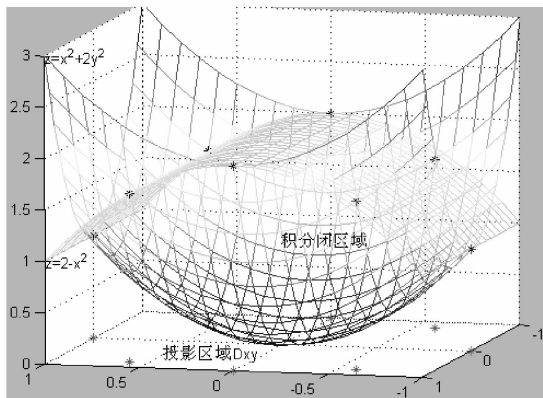


图5 Ω 的投影区域

3 结束语

将 MATLAB 软件引入高等数学教学,可以简化重积分的计算,增强学生的空间想像能力和应用数学知识解决实际问题的能力,提高教学效果。

参考文献:

- [1] 同济大学数学系. 高等数学(下册)[M]. 北京:高等教育出版社,2007
- [2] 邓薇. MATLAB 函数速查手册[M]. 北京:人民邮电出版社,2010
- [3] 王正林,刘明. 精通 MATLAB7[M]. 北京:电子工业出版社,2006
- [4] 李昆,赵刚. 三重积分中两种计算方法的比较[J]. 孝感学院学报,2010,30(6):23-25
- [5] 习长新. 利用 MATLAB 表现空间曲面的交线[J]. 荆门职业技术学院学报,2007,22(9):46-48
- [6] 严永仙. 利用平面投影图形确定三重积分的积分限[J]. 浙江师范大学学报:自然科学版,2004,27(4):345-348

Application of MATLAB to Computing Multiple Integral

QIU Hai-quan, PAN Hua

(Mathematics Department, School of Science, Anhui Science and Technology University,
Anhui Fengyang 233100, China)

Abstract: Multiple integral is an important and difficult part in advanced mathematical teaching, especially in multiple integral's calculation, which involves in the determination of integral domain and the sequence of exchange integral and so on. The Matlab software has more advantages in calculating numerical solutions to multiple integral, its function-library furnishes several functions for solving simple multiple integral. For complicated integral, Matlab is used to draw the integral domain for identifying the type of integral domain at first, then corresponding functions are used to calculate. Several different examples of double and triple integral are discussed in this paper by using Matlab, and the corresponding codes are given. The operation and demonstration of Matlab is convenient, it has more advantages in aiding multiple integral's teaching.

Key words: Matlab; multiple integral calculation; integral domain; projection area

责任编辑:代小红