文章编号:1672 - 058X(2012)04 - 0023 - 04

矩阵特征值不等式

胡兴凯
(昆明理工大学 理学院,云南 昆明 650500)

摘　要:讨论了矩阵特征值及其实部虚部之间的不等式;得到了特征值与其实部、虚部,特征值实部与虚部之间的一些不等式;给出了特征值实部与虚部的上界的估计和判断矩阵非奇异性的方法.

关键词:特征值;实部;虚部;不等式;上界
中图分类号:O151.21　　**文献标志码**:A

1　符号约定

用 $R^{n\times n}$ 和 $C^{n\times n}$ 分别表示 $n\times n$ 阶实矩阵和复矩阵的集合,$\lambda_i = a_i + b_i\sqrt{-1}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值,其中 a_i 和 b_i 分别为 λ_i 的实部和虚部,$\mathrm{Re}(\lambda)$ 表示取 λ 的实部,$\mathrm{lm}(\lambda)$ 表示取 λ 的虚部. $A^* = \bar{A}'$ 表示 A 的共轭转置,$\|A\|_F$ 表示矩阵 A 的 $F-$范数,即 $\|A\|_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^*)}$,其中 $\mathrm{tr}A$ 表示矩阵 A 的迹. $\det A$ 表示 A 的行列式,$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩,I_n 表示复数域上 $n\times n$ 阶单位矩阵.

2　基本不等式

首先定义:

$$\sqrt{\left(\|A\|_F^2 - \frac{|\mathrm{tr}A|^2}{n}\right)^2 - \frac{1}{2}\|AA^* - A^*A\|_F^2} + \frac{|\mathrm{tr}A|^2}{n} = \mu$$

引理 1[1]　设 $A\in C^{n\times n}$,$\lambda_i = a_i + b_i\sqrt{-1}(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值,则 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \mu$.

引理 2[2]　设 $A\in C^{n\times n}$,若 $|\mathrm{tr}A|^2 > (n-1)\mu$,则 A 为非奇异矩阵.

定理 1　设 $A\in C^{n\times n}$,λ 为 A 的任一特征值且 $\mathrm{tr}A\neq 0$,则下面的不等式成立:

$$n|\lambda|^2 + |\mathrm{tr}A|^2 - (n-1)\mu \leqslant 2(\mathrm{Re}\lambda\cdot\mathrm{Retr}A + \mathrm{lm}\lambda\cdot\mathrm{lmtr}A)$$

证明　令 $B=\lambda I_n - A$,则:

$$\det B = 0$$

于是:

$$r(B) = r(\lambda I_n - A) \leqslant n-1$$

由引理 2 得:

收稿日期:2011 - 10 - 11;**修回日期**:2011 - 10 - 31.
作者简介:胡兴凯(1982-),男,山东泰安人,助教,硕士,从事矩阵理论研究.

$$|\mathrm{tr}B|^2 \leqslant (n-1)\left(\sqrt{\left(\|B\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}B|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|BB^*-B^*B\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}B|^2}{n}\right)$$

$$|\mathrm{tr}(\lambda I_n-A)|^2 \leqslant$$
$$(n-1)\left(\sqrt{\left(\|\lambda I_n-A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}(\lambda I_n-A)|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|(\lambda I_n-A)(\lambda I_n-A)^*-(\lambda I_n-A)^*(\lambda I_n-A)\|_F^2}+\frac{|\mathrm{tr}(\lambda I_n-A)|^2}{n}\right) \tag{1}$$

经计算知：

$$\|(\lambda I_n-A)(\lambda I_n-A)^*-(\lambda I_n-A)^*(\lambda I_n-A)\|_F^2=\|AA^*-A^*A\|_F^2 \tag{2}$$

$$\|\lambda I_n-A\|_F^2=\frac{|\mathrm{tr}(\lambda I_n-A)|^2-|\mathrm{tr}A|^2}{n}+\|A\|_F^2 \tag{3}$$

由式(1)－(3)可得：

$$\frac{|\mathrm{tr}(\lambda I_n-A)|^2}{n}\leqslant(n-1)\sqrt{\left(\|A\|_F^2-\frac{|\mathrm{tr}A|^2}{n}\right)^2-\frac{1}{2}\|AA^*-A^*A\|_F^2} \tag{4}$$

由于

$$|\mathrm{tr}(\lambda I_n-A)|^2=n^2|\lambda|^2+|\mathrm{tr}A|^2-2n(\mathrm{Re}\lambda\cdot\mathrm{Re}\mathrm{tr}A+\mathrm{lm}\lambda\cdot\mathrm{lm}\mathrm{tr}A) \tag{5}$$

由式(4)(5)知结论成立.

推论 1 设 $A\in R^{n\times n}$，λ 为 A 的任一特征值且 $\mathrm{tr}A\neq0$，则

① 当 $\mathrm{tr}A>0$，有：

$$\mathrm{Re}\lambda\geqslant\frac{n|\lambda|^2+(\mathrm{tr}A)^2-(n-1)\mu}{2\mathrm{tr}A}$$

② 当 $\mathrm{tr}A<0$，有：

$$\mathrm{Re}\lambda\leqslant\frac{n|\lambda|^2+(\mathrm{tr}A)^2-(n-1)\mu}{2|\mathrm{tr}A|}$$

推论 2 设 $A\in R^{n\times n}$，λ 为 A 的任一特征值且 $\mathrm{tr}A\neq0$，则

$$|\lambda|^2\leqslant\frac{2\mathrm{tr}A\cdot\mathrm{Re}\lambda+(n-1)\mu-(\mathrm{tr}A)^2}{n}$$

推论 3 设 $A\in C^{n\times n}$，λ 为 A 的任一特征值，如果 $\mathrm{Re}\mathrm{tr}A\neq0$（或 $\mathrm{lm}\mathrm{tr}A\neq0$），则

$$\mathrm{Re}\lambda\cdot\mathrm{Re}\mathrm{tr}A+\mathrm{lm}\lambda\cdot\mathrm{lm}\mathrm{tr}A>\frac{|\mathrm{tr}A|^2-(n-1)\mu}{2}$$

3 特征值实部虚部的上界和非奇异性的判定

定理 2 设 $A\in C^{n\times n}$，$\lambda_i=a_i+b_i\sqrt{-1}\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为 A 的特征值，则：

$$\sum_{i=1}^n a_i^2\leqslant\left\|\frac{A+A^*}{2}\right\|_F^2-\frac{1}{2}(\|A\|_F^2-\mu)$$

$$\sum_{i=1}^n b_i^2\leqslant\left\|\frac{A-A^*}{2\sqrt{-1}}\right\|_F^2-\frac{1}{2}(\|A\|_F^2-\mu)$$

证明 由 Schur 分解定理知，存在酉矩阵 P，使得

$$P^{*}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & k_{12} & k_{13} & \cdots & k_{1n}\\ 0 & \lambda_2 & k_{23} & \cdots & k_{2n}\\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & k_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\|A\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|k_{ij}|^2 \tag{6}$$

又有

$$P^{*}\left(\frac{A+A^{*}}{2}\right)P=\begin{pmatrix}a_1 & \frac{1}{2}k_{12} & \frac{1}{2}k_{13} & \cdots & \frac{1}{2}k_{1n}\\ \frac{1}{2}\overline{k_{12}} & a_2 & \frac{1}{2}k_{23} & \cdots & \frac{1}{2}k_{2n}\\ \frac{1}{2}\overline{k_{13}} & \frac{1}{2}\overline{k_{23}} & a_3 & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{2}\overline{k_{1n}} & \frac{1}{2}\overline{k_{2n}} & \frac{1}{2}\overline{k_{3n}} & \cdots & a_n\end{pmatrix}$$

所以

$$\left\|\frac{A+A^{*}}{2}\right\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|k_{ij}|^2 \tag{7}$$

同理可得

$$\left\|\frac{A-A^{*}}{2\sqrt{-1}}\right\|_F^2=\sum_{i=1}^{n}b_i^2+\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|k_{ij}|^2 \tag{8}$$

因此,由式(6)(7)消去 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|k_{ij}|^2$,可得

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\left\|\frac{A+A^{*}}{2}\right\|_F^2-\frac{1}{2}\left(\|A\|_F^2-\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\right) \tag{9}$$

同理,由式(6)(8)消去 $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|k_{ij}|^2$,可得

$$\sum_{i=1}^{n}b_i^2=\left\|\frac{A-A^{*}}{2\sqrt{-1}}\right\|_F^2-\frac{1}{2}\left(\|A\|_F^2-\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\right) \tag{10}$$

故,由式(9)(10)和引理 1 知定理 2 成立.

注:由文献[1]知道 $\mu\leqslant\sqrt{\|A\|_F^4-\frac{1}{2}\|AA^{*}-A^{*}A\|_F^2}$,因此得到的定理2 肯定比文献[3]定理3.1 的上界精确,当然也比 Schur 不等式更精确.

定理 3 设 $A\in C^{n\times n}$,$\lambda_i=a_i+b_i\sqrt{-1}(i=1,2,\cdots,n)$为 A 的特征值,若 A 满足下列条件之一,则 A 为非奇异矩阵.

$$(\mathrm{Retr}A)^2>(n-1)\left(\left\|\frac{A+A^{*}}{2}\right\|_F^2-\frac{1}{2}(\|A\|_F^2-\mu)\right) \tag{11}$$

$$(\mathrm{lmtr}A)^2>(n-1)\left(\left\|\frac{A-A^{*}}{2\sqrt{-1}}\right\|_F^2-\frac{1}{2}(\|A\|_F^2-\mu)\right) \tag{12}$$

证明 对任意 p 个复数 $z_1,z_2,\cdots,z_p$,由 Lagrange 恒等式有:

$$p\sum_{i=1}^{p}|z_i|^2-|\sum_{i=1}^{p}z_i|^2=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant p}|z_i-z_j|^2$$

经变形可得

$$p\sum_{i=1}^{p}|z_i|^2-|\sum_{i=1}^{p}z_i|^2\geqslant\frac{p}{2}\max_{1\leqslant i<j\leqslant p}|z_i-z_j|^2$$

由此可得

$$p\geqslant\frac{|\sum_{i=1}^{p}z_i|^2}{\sum_{i=1}^{p}|z_i|^2} \tag{13}$$

设 A 有 t 个非零特征值(不妨设为)$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$,则在 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中的非零数 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_h}$ 的个数 h 不会超过 t,同理 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 中的非零数 $b_{j_1},b_{j_2},\cdots,b_{j_q}$ 的个数 q 不会超过 t,知道 $r(A)\geqslant t$,将式(13)分别取 $p=h,z_l=a_{i_l}(l=1,2,\cdots,h)$;$p=q,z_l=b_{j_l}(l=1,2,\cdots,q)$,则分别得到:

$$r(A)\geqslant t\geqslant h\geqslant\frac{(\sum_{l=1}^{h}a_{i_l})^2}{\sum_{l=1}^{h}a_{i_l}^2}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}$$

$$r(A)\geqslant t\geqslant q\geqslant\frac{(\sum_{l=1}^{q}b_{j_l})^2}{\sum_{l=1}^{q}b_{j_l}^2}=\frac{(\sum_{i=1}^{n}b_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$$

再结合定理3的条件和定理2知道结论成立.

参考文献:

[1] HUANG ZH T,WANG L. Improving bounds for eigenvalues of complex matrices using traces[J]. Linear Algebra Appl,2007(426):841-854

[2] ZOU L M,JIANG Y Y. A simple criterion for the stability of linear system with constant coefficients[J]. Advanced Materials Research,2010(10):359-362

[3] 胡兴凯,伍俊良. 矩阵秩的下界和特征值估计[J]. 山东大学学报:理学版,2009,44(8):46-50,55

Inequalities of Matrix Eigenvalues

HU Xing-kai

(School of Science,Kunming University of Science and Technology,Kunming 650500,China)

Abstract: This paper discussed inequalities between matrix eigenvalue and its real part and imaginary part, obtained some inequalities between eigenvalues and their real parts and imaginary parts and between eigenvalues real parts and imaginary parts,and proposed the method for upper bound estimate for the real parts and imaginary parts of eigenvalues and the method for determining nonsingularity of matrices.

Key words: eigenvalue; real part; imaginary part; inequality; upper bound

责任编辑:李翠薇