文章编号:1672－058X(2012)04－0020－03

FG-平坦模*

唐义立, 葛茂荣, 谢国根, 张　魁
(安徽大学 数学科学学院,合肥 230039)

摘　要:引入了 *FG*-平坦模的概念,并研究了它们的性质;进一步地研究了它的维数,以及它在模类中的应用,得到了与平坦模相似的一些性质.

关键词:*FG*-平坦模;有限生成维数;有限生成模

中图分类号:O153.3　　**文献标志码**: A

文中的环 R 都是有单位元的结合环,模都是酉模.

定义 1　设 $F_R=\{M_R \mid M_R$ 是有限生成模$\}$,$K\in F_R$,称${}_RN$ 为 *FG-M* 平坦模,若对任意的 R-模单同态 $f:K\to M$,都有 $0\to K\otimes N\to M\otimes N$ 正合.

定义 2　${}_RN$ 为 *FG*-平坦模是指对任意的右 R 模 M_R,${}_RN$ 都是 *FG-M* 平坦模.

命题 1　平坦模是 *FG*-平坦模.

命题 2　${}_RR$ 是左 *FG*-平坦模.

定理 1　${}_RN$ 为 *FG*-平坦模当且仅当对任意的内射右 R 模 E,都有${}_RN$ 为 *FG-E* 平坦模.

证明　"⇒"　根据 *FG*-平坦模的定义显然成立.

"⇐"　对任意单同态 $f:K\to M$,其中 $K\in F_R$,根据同调代数的图追踪法,显然有图 1:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "gf"] & E \arrow[r] & \dfrac{E}{\mathrm{lm}\ gf} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f"] \arrow[u, "I_K"] & M \arrow[r] \arrow[u, "g"'] & \dfrac{M}{K} \arrow[r] \arrow[u, "h"'] & 0
\end{tikzcd}$$

图 1　下行正合交换图

则存在单同态 $g:M\to E$ 和有如图 1 的下行正合交换图且 h 是单的. 将函子_$\otimes N$ 作用于图 1,再由 N 是 F_R-E 平坦,可得图 2 为行正合的交换图:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K\otimes N \arrow[r, "gf\otimes I_N"] & E\otimes N \arrow[r] & \dfrac{E}{\mathrm{lm}gf}\otimes N \arrow[r] & 0 \\
 & K\otimes N \arrow[r, "f\otimes I_N"] \arrow[u, "I_K\otimes I_N"] & M\otimes N \arrow[r] \arrow[u, "g\otimes I_N"'] & \dfrac{M}{K}\otimes N \arrow[r] \arrow[u, "h\otimes I_N"'] & 0
\end{tikzcd}$$

图 2　行正合交换图

收稿日期:2011－09－03;**修回日期**:2011－10－09.

* **基金项目**:安徽大学学术创新团队(KJTD0018).

作者简介:唐义立(1986-),男,安徽安庆人,硕士研究生,从事环与模理论方面的研究.

其中 $gf\otimes I_N=(g\otimes I_N)(f\otimes I_N)$ 为单的模同态,故 $f\otimes I_N$ 为单,所以 $_RN$ 为 FG-平坦模.

定理 2　对于 R-模 M_R,下列条件等价:

(1) $_RN$ 是 FG-M 平坦模.

(2) 对 M 的任意有限生成子模 K,都有 $0\to K\otimes N\to M\otimes N$ 正合.

(3) 对 M 的任意有限生成子模 K,都有 $Tor_1^R\left(\frac{M}{K},N\right)=0$.

证明　(1)⇒(2)　根据 FG-平坦模的定义显然成立.

(2)⇒(1)　对任意的 R 模单同态 $f:L\to M$,其中 $L\in F_R$,取 $K=\mathrm{lm}f\leqslant M$,$i_K:K\to M$. 由因子定理知,存在 R 模同构 $h:K\to L$,使得 $fh=i_k$,且有 $L\in F_R$,如图 3.

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to N_1\otimes M & \to & N\otimes M & \to & N_2\otimes M & \to & 0\\
I_{N_1}\otimes\alpha\uparrow & & \uparrow I_N\otimes\alpha & & \uparrow I_{N_2}\otimes\alpha & & \\
N_1\otimes K & \longrightarrow & N\otimes K & \longrightarrow & N_2\otimes K & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

图 3　投射交换图

(1)⇔(3)　设 K 为 M 的有限生成子模,则有正合列 $0\to K\to M\to\frac{M}{K}\to 0$,由长正合列定理知 $Tor_1^R\left(\frac{M}{K},N\right)\to K\otimes N\to M\otimes N$ 正合,而 $0\to K\otimes N\to M\otimes N$ 正合 $\Leftrightarrow Tor_1^R\left(\frac{M}{K},N\right)=0$.

定理 3　设 M 是右 R 模,则:

(1) 所有 FG-M 平坦模构成的类 $F_f(M)$ 在任意直和、直和项下是封闭的.

(2) 如果 N 是 FG-平坦的,则对任意右 R 模正合列 $0\to N_1\to N\to N_2\to 0$,若 N_1,N_2 是 FG-M 平坦的,则 N 也是 FG-M 平坦的.

证明　(1) 设 $N_i(i\in I)$ 是一簇 FG-M 平坦左 R-模,K 为 M 的任一有限生成子模,由 $Tor_1^R\left(\frac{M}{K},\bigoplus_{i\in I}N_i\right)\cong\bigoplus Tor_1^R\left(\frac{M}{K},N_i\right)$ 可得 $(\bigoplus_{i\in I}N_i)$ 是 FG-M 平坦的充分必要条件是:每个 $N_i(i\in I)$ 都是 FG-M 平坦的,所以 $F_f(M)$ 在任意直和、直和项下是封闭的.

(2) 设 $\alpha:K\to M$,K 为 M 的 F_R 子模,则有图 4:

$$\begin{array}{ccccccc}
0\to N_1\otimes M & \to & N\otimes M & \to & N_2\otimes M & \to & 0\\
I_{N_1}\otimes\alpha\uparrow & & \uparrow I_N\otimes\alpha & & \uparrow I_{N_2}\otimes\alpha & & \\
N_1\otimes K & \longrightarrow & N\otimes K & \longrightarrow & N_2\otimes K & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

图 4　行正合列

由文献[1]同调代数 3.14 引理知,$I_N\otimes\alpha$ 为单,故 N 为 FG-M 平坦的.

定理 4　对于任意环 R,有限生成投射模 P_R 是 FG-平坦模,因此任意 R-模 M 都有有限生成的平坦分解,即有下形 M_R 正合列:

$\cdots\to F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_1\to F_0\to M\to 0$,其中 F_j 都是 FG-平坦的,$j=0,1,\cdots$.

证明　由命题 2 知,R 是 FG-平坦模,再由定理 3 知,$\bigoplus_{j\in J}R$ 是 FG-平坦的,即有限生成的自由模都是有限平坦的. 由于投射模为自由模的直和项,则可由定理 3 推广知,有限生成的投射模是有限平坦的.

由此可知,有限投射分解都是有限平坦分解的,而又由于有限投射分解的存在性,所以 M 的有限平坦分解总是存在的.

定义 3 在 M_R 中对任意的 $M \in M_R$,记 $frfd(M) = \inf\{n \mid 0 \to F_n \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 正合,F_j 是 FG-平坦模,$j = 0, 1, \cdots, n\}$,且称之为 M 的右有限生成平坦维数. 当上述 n 不存在时,规定 $frfd(M) = \infty$.

定义 4 $frWD(R) = \sup\{frfd(M) \mid M \in M_R\}$ 称之为环 R 的右有限生成弱维数.

注:可类似地定义左有限生成平坦维数和左有限生成弱维数.

定理 5 设 R 为任意环,则:

(i) $frfd(M) = 0 \Leftrightarrow M$ 是 FG-平坦模.

(ii) $frfd(M) \leqslant 1 \Leftrightarrow$ 有 F_0, F_1 为 FG-平坦模,使得 $M \cong \dfrac{F_0}{F_1}$.

(iii) $frwD(R) = 0 \Leftrightarrow$ 一切右 R-模都是 FG-平坦的.

证明 (i) $frfd(M) = 0$ 等价于 M 有形如 $0 \to F_0 \xrightarrow{f} M \to 0$ 正合. 这等价于 f 为单,所以等价于 M 为 FG-平坦模.

(ii) $frfd(M) \leqslant 1$ 等价于 M 有形如 $0 \to F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 正合,这等价于 $M \cong \dfrac{F_0}{F_1}$.

(iii) 由弱维数定义和(i),知(iii)显然成立.

参考文献:

[1] ANDERSON F W, FULLER K R. Rings and Categories of Modules [M]. New York: Springer-verlag, 1974

[2] 佟文廷. 同调代数引论[M]. 北京:高等教育出版社, 1998

[3] 竹红英. 广义平坦模[J]. 应用数学, 2004, 17(增): 127-129

[4] 李珊珊, 汪明义. 关于 P-平坦模[J]. 广西师范大学学报:自然科学版, 2004, 22(4): 36-40

[5] 朱占敏. 极小内射模、极小平坦模与某些环[J]. 内蒙古大学学报:自然科学版, 2004, 35(4): 365-371

[6] 阿布都瓦克. 玉奴司, 张四保. 欧氏环中两元的最大公因式及其性质[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版, 2010, 27(3): 223-224, 239

FG-Flat Module

TANG Yi-li, GE Mao-rong, XIE Guo-gen, ZHANG Kui

(Department of Mathernatical Science, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: This paper introduces the concept of *FG*-flat modules, studies their properties, and further researches their dimensions and their application to modules. Some properties similar to flat module are obtained.

Key words: *FG*-flat module; finitely generated dimension; finitely generated module

责任编辑:李翠薇