文章编号:1672 -058X(2012)04 -0011 -06

非负矩阵 Perron 根界的估计式的改进*

蔡占通, 段艳辉

(云南大学 数学与统计学院,云南 昆明 650091;邯郸学院 数学系,河北 邯郸 056001)

摘 要: 矩阵的谱半径在特征值估计理论、广义逆矩阵、数值分析以及矩阵序列、矩阵级数的收敛分析、控制理论中都有着极为重要的作用,近年来许多学者都致力于这方面的研究,提出了许多改进的谱半径估计方法,利用 Perron 补矩阵进行谱半径估计也一直受到广大学者的重视. 通过研究矩阵的广义 Perron 补的性质,给出非负矩阵 Perron 根界的几个新的估计式.

关键词: 非负矩阵;广义 Perron 补;不可约性;Perron 根

中图分类号: O151.21 **文献标志码:** A

1 引言及预备知识

矩阵理论是一门重要的数学理论,很多实际问题最后常常归结为一个或一些大型系统矩阵(非负矩阵),非负矩阵是矩阵论中的一个重要矩阵类,对它研究的步伐始终就没有停止过,对于非负矩阵特征值的求解及估计的研究是矩阵分析和数值代数研究的重要课题,矩阵谱的估计被广泛应用于数值分析、图论、稳定性理论等相关学科,是矩阵理论研究中相当活跃的一个研究课题。近年来,不断有新的研究成果涌现出来,特别是非负矩阵的 Perron 根的估计.

先规定一些记号. $R^{n\times n}$ 表示所有 $n\times n$ 阶实矩阵构成的集合,若 $A\in R^{n\times n}$,α 与 β 皆为 $N=\{1,2,\cdots,n\}$ 的有序严格增加的整数子集. 用 $A[\alpha,\beta]$ 表示矩阵 A 的子矩阵,$A[\alpha,\beta]$ 的行与列分别由 α 与 β 确定. 当 $\alpha=\beta$ 时,将 $A[\alpha,\beta]$ 简单的记为 $A[\alpha]$. $r_i(A)$ 表示 A 的第 i 行和.

定义 1 设矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$,$\lambda_i$ 是其特征值,$i=1,2,\cdots,n$. 称 $\rho(A)=\max\{|\lambda_i|,i=1,2,\cdots,n\}$ 为 A 的谱半径,等于谱半径的特征值称为矩阵的 Perron 根.

定义 2 若实矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 的每个元素 $a_{ij}\geqslant 0(a_{ij}>0)$,则称 A 是非负矩阵(正矩阵),记为 $A\geqslant 0$ $(A>0)$.

定义 3 设矩阵 $A\geqslant 0$,如果存在置换矩阵 $P\in R^{n\times n}$,使得 $PAP^{\mathrm T}=\begin{pmatrix} B & C\\ 0 & D\end{pmatrix}$,其中 B 和 D 分别是 k,l 阶方阵,$k\geqslant 1$,$l\geqslant 1$,$k+l=n$,则 A 称为可约矩阵;否则称 A 为不可约矩阵.

定义 4[1] 若非负矩阵 A 的分块形式为 $A=\begin{pmatrix} A[\alpha] & A[\alpha,\beta]\\ A[\beta,\alpha] & A[\beta]\end{pmatrix}$,记 $P(A/A[\alpha])=A[\beta]+A[\beta,\alpha]$

收稿日期: 2011 -08 -16;**修回日期:** 2011 -10 -09.

* **基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(10961027).

作者简介: 蔡占通(1981-),男,河北邯郸人,硕士研究生,从事数值计算及其应用研究.

$(\rho(A)I-A[\alpha])^{-1}A[\alpha,\beta]$,称 $P(A/A[\alpha])$ 为 A 的 Perron 补. 记 $P_t(A/A[\alpha])=A[\beta]+A[\beta,\alpha](tI-A[\alpha])^{-1}A[\alpha,\beta]$,$t>\rho(A[\alpha])$,称 $P_t(A/A[\alpha])$ 为 A 广义 Perron 补.

定理 1[2] 设 A 为非负矩阵,$\rho(A)$ 表示 A 的 Perron 根,则 $r_{\max}(A)\geqslant\rho(A)\geqslant r_{\min}(A)$,其中 $r_{\max}(A)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}r_j(A)$,$r_{\min}(A)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}r_j(A)$. 且若 A 为不可约,则上式两端或同时成立等号或同时为严格不等号.

定理 2[3] 设 A 为正矩阵,$\rho(A)$ 表示 A 的 Perron 根,$r_{\max}(A)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}r_j(A)$,$r_{\min}(A)=\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}r_j(A)$,$a=\min\limits_{i,j\in N}a_{ij}$,并设

$$
\begin{aligned}
g&=\frac{r_{\max}(A)-2a+\sqrt{r_{\max}(A)^2-4a(r_{\max}(A)-r_{\min}(A))}}{2(r_{\min}(A)-a)}\\
h&=\frac{-r_{\min}(A)+2a+\sqrt{r_{\min}(A)^2+4a(r_{\max}(A)-r_{\min}(A))}}{2a}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

则 $r_{\min}(A)+a(h-1)\leqslant\rho(A)\leqslant r_{\max}(A)-a\left(1-\dfrac{1}{g}\right)$.

注意到在 Brauer 的结果中,$\rho(A)$的界依赖于中最小元素 m 的值. 显然,如果 A 中最大元素与最小元素相差很大时,式(1)中至少有一个界是不精确的.

卢琳璋在文献[4]中对于非负不可约矩阵的广义 Perron 补做了大量研究,并将其所得性质用于 A 的 Perron 根的估计. 应用 A 的广义 Perron 补估计 Perron 根的最大优点是可以灵活选择 α 和 t,得到较好的估计式.

引理 1[5] 如果 A 为非负不可约矩阵,则当 $t>\rho(A[\alpha])$ 时,$P_t(A/A[\alpha])$ 也是非负不可约矩阵,且 $\rho(P_t(A/A[\alpha]))$ 是 t 严格递减函数.

引理 2[6] 如果 A 为非负不可约矩阵,则:

(1) 当 $t\in(\rho(A[\alpha]),+\infty)$ 时,$z(t,\alpha)=r_{\min}\left(P_t\left(\dfrac{A}{A[\alpha]}\right)\right)$是关于 t 的严格减函数.

(2) 当 $t\in(\rho(A[\beta]),+\infty)$ 时,$\hat{z}(t,\beta)=r_{\max}\left(P_t\left(\dfrac{A}{A[\beta]}\right)\right)$是关于 t 的严格增函数.

定理 3[4] 如果 A 为不可约非负矩阵,则:

$$
\rho\left(P_t\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)\right)\begin{cases}<\rho(A),t>\rho(A)\\=\rho(A),t=\rho(A)\\>\rho(A),\rho(A[\alpha])<t<\rho(A)\end{cases}
$$

定理 4[6] 若存在 l 和 u,使得 $l\leqslant\rho\left(P_t\left(\dfrac{A}{A[\alpha]}\right)\right)\leqslant u$,$t>\rho(A[\alpha])$,则 $\min\{t,l\}\leqslant\rho(A)\leqslant\max\{t,u\}$. 特别地,如果 $z(t,\alpha)=r_{\min}\left(P_t\left(\dfrac{A}{A[\alpha]}\right)\right)$,$\hat{z}(t,\alpha)=r_{\max}\left(P_t\left(\dfrac{A}{A[\alpha]}\right)\right)$,则可得到 $z(t,\alpha)\leqslant\rho\left(P_t\left(\dfrac{A}{A[\alpha]\leqslant\hat{z}(t,\alpha)}\right)\right)$,且 $\min\{t,z(t,\alpha)\}\leqslant\rho(A)\leqslant\max\{t,\hat{z}(t,\alpha)\}$.

定理 5[4] 若 $A\geqslant0$ 和 $t_0>r_{\max}(A[\alpha])$,则:

$$
\begin{aligned}
z(t_0,\alpha)&\geqslant\min_j\{r_jA[\beta]+v_1(t_0,\alpha)r_j(A[\beta,\alpha])\}\\
\hat{z}(t_0,\alpha)&\leqslant\max_j\{r_jA[\beta]+v_2(t_0,\alpha)r_j(A[\beta,\alpha])\}
\end{aligned}
$$

其中 $v_1(t_0,\alpha)=\min\limits_i\dfrac{r_i(A[\alpha,\beta])}{t_0-r_i(A[\alpha])}$ 和 $v_2(t_0,\alpha)=\max\limits_i\dfrac{r_i(A[\alpha,\beta])}{t_0-r_i(A[\alpha])}$.

2 利用广义 Perron 补对 Perron 根界估计式的改进

定理 6[4] 设 $A\in R^{n\times n}$ 是非负不可约矩阵,且 $n\geqslant3$,$r_{\max}(A)>r_{\min}(A)$,选择 $\alpha(\beta=N\backslash\alpha)$ 和 t_0,使得:

$$\max\{\max_{j\in\beta}r_j(A),r_{\max}(A[\alpha])\} < \min_{i\in\alpha}r_i(A),r_{\min}(A[\beta,\alpha]) > 0$$

$$\max\{\max_{j\in\beta}r_j(A),r_{\max}(A[\alpha])\} < t_0 < \min_{j\in\alpha}r_j(A)$$

则 $\rho(A)\geqslant\min\{t_0,z(t_0,\alpha)\}>r_{\min}(A)$.

改变定理 6 的条件可以得到下面定理.

定理 7　设矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为非负不可约矩阵,且 $n\geqslant3$,$r_{\max}(A)>r_{\min}(A)$,选择 $\alpha(\beta=N\backslash\alpha)$ 和 t_0,使得 $\max(r_{\max}(A[\alpha]),r_{\min}(A))<\min_{i\in\alpha}r_i(A)$,$\max(r_{\max}(A[\alpha]),r_{\min}(A))<t_0<\min_{i\in\alpha}r_i(A)$,则 $\rho(A)\geqslant\min\{t_0,z(t_0,\alpha)\}>r_{\min}(A)$.

证明　由条件 $r_{\max}(A[\alpha])<t_0<\min_{j\in\alpha}r_j(A)$,知对任意的 $j\in\alpha$,有:

$$t_0-r_j(A[\alpha])-r_j(A[\alpha,\beta])=t_0-r_j(A[\alpha,N])\leqslant t_0-\min_{j\in\alpha}r_j(A)<0$$

故 $0<t_0-r_j(A[\alpha])<r_j(A[\alpha,\beta])$,$v_1(t_0,\alpha)=\min_j\dfrac{r_j(A[\alpha,\beta])}{t_0-r_j(A[\alpha])}>1$.

由定理 5 知:

$$z(t_0,\alpha)\geqslant\min_j\{r_j(A[\beta])+v_1(t_0,\alpha)r_j(A[\beta,\alpha])\}>\min_{j\in\beta}r_j(A)\geqslant r_{\min}(A)$$

因 $t_0>r_{\min}(A)$,故 $\min\{t_0,z(t_0,\alpha)\}>r_{\min}(A)$. 再由定理 4 知 $\rho(A)\geqslant\min\{t_0,z(t_0,\alpha)\}$,故 $\rho(A)\geqslant\min\{t_0,z(t_0,\alpha)\}>r_{\min}(A)$.

推论 1　若 A 满足定理 6 的条件,t_1 和 t_2 分别满足定理 6 和定理 7 的条件,且式(2)-(5)成立:

$$\max\{r_{\min}(A),r_{\max}(A[\alpha])\}<\max\{\max_{j\in\beta}r_j(A),r_{\max}(A[\alpha])\}\tag{2}$$

$$\max\{\max_{j\in\beta}r_j(A),r_{\max}(A[\alpha])\}<t_1<\min_{i\in\alpha}r_i(A)\tag{3}$$

$$\max\{r_{\min}(A),r_{\max}(A[\alpha])\}<t_2<\max\{\max_{j\in\beta}r_j(A),r_{\max}(A[\alpha])\}\tag{4}$$

$$t_2>z(t_1,\alpha)\tag{5}$$

则 $\rho(A)\geqslant\min\{t_2,z(t_2,\alpha)\}>\min\{t_1,z(t_1,\alpha)\}>r_{\min}(A)$.

证明　因 $t_2<t_1$,由引理 2 知,$z(t_2,\alpha)>z(t_1,\alpha)$,于是由 $z(t_1,\alpha)<t_2<t_1$,得:

$$\min\{t_2,z(t_2,\alpha)\}>\min\{t_1,z(t_1,\alpha)\}$$

由定理 4 得:

$$\rho(A)\geqslant\min\{t_2,z(t_2,\alpha)\}>\min\{t_1,z(t_1,\alpha)\}>r_{\min}(A)$$

注:因 $\max\{r_{\min}(A),r_{\max}(A[\alpha])\}<\max\{\max_{j\in\beta}r_j(A),r_{\max}(A[\alpha])\}$,故定理 7 扩充了定理 6 的 t_0 的取值范围. 当满足推论 1 的条件时,定理 7 改进了定理 6 的结论.

例 1　设 $A=\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&1&5&3\\1&1&1&1\\2&1&2&1\end{pmatrix}$,取 $\alpha=\{1,2\}$,计算得 $r_{\max}(A[\alpha])=5$,$r_{\min}(A)=4$,$\min_{i\in\alpha}r_i(A)=10$,即 $\max(r_{\max}(A[\alpha]),r_{\min}(A))<\min_{i\in\alpha}r_i(A),r_{\min}(A[\beta,\alpha])>0$,满足定理 6 和定理 7 的条件. 取 $t_1=9$,$t_2=5.9$,通过计算得 $z(t_1,\alpha)=4.607\,1$,$\min\{t_1,z(t_1,\alpha)\}=4.607\,1$,$z(t_2,\alpha)=8.602\,1$,$\min\{t_2,z(t_2,\alpha)\}=5.9$,即推论 1 的条件满足.

当 $t_1=9$ 时,由定理 6 得 $\rho(A)\geqslant4.607\,1$. 当 $t_2=5.9$ 时,由定理 7 得 $\rho(A)\geqslant5.9$. 故定理 7 在某些情况下改进了定理 6.

引理 3[6]　设矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为非负不可约矩阵,且 $n\geqslant3$,$r_{\max}(A)>r_{\min}(A)$,选择 $\alpha(\beta=N\backslash\alpha)$ 和 t_0,使得:

$$\max(\max_{j\in\alpha}r(A),r_{\max}(A[\beta]))<\min_{i\in\beta}r_i(A),r_{\min}(A[\alpha,\beta])>0$$

$$\max_{j\in\alpha} r_j(A) < t_0 < r_{\max}(A)$$

则 $\rho(A)\leqslant\max\{t_0,\hat{z}(t_0,\alpha)\}<r_{\max}(A)$.

改变引理3的条件,可得到下面定理.

定理8 设矩阵 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$ 为非负不可约矩阵,且 $n\geqslant 3$, $r_{\max}(A)>r_{\min}(A)$,选择 $\alpha(\beta=N\backslash\alpha)$ 和 t_0,使得 $\max\limits_{j\in\alpha} r_j(A)<t_0<r_{\max}(A)$,则 $\rho(A)\leqslant\max\{t_0,\hat{z}(t_0,\alpha)\}<r_{\max}(A)$.

证明 由 $\max\limits_{j\in\alpha} r_j(A)<t_0<r_{\max}(A)$,知

$$t_0-r_j(A[\alpha])-r_j(A[\alpha,\beta])=t_0-r_j(A[\alpha,N])\geqslant t_0-\max_{j\in\alpha} r_j(A)>0$$

$$t_0-r_j(A[\alpha])>r_j(A[\alpha,\beta])\geqslant 0$$

$$0\leqslant v_2(t_0,\alpha)=\max_j \frac{r_j(A[\alpha,\beta])}{t_0-r_j(A[\alpha])}<1$$

因 $t_0>\max\limits_{j\in\alpha} r_j(A)\geqslant r_{\max}(A[\alpha])$,由定理5知 $\hat{z}(t_0,\alpha)\leqslant\max\limits_j\{r_j(A[\beta])+v_2(t_0,\alpha)r_j(A[\beta,\alpha])\}<\max\limits_{j\in\beta} r_j(A)\leqslant r_{\max}(A)$,再由定理4知 $\rho(A)\leqslant\max\{t_0,\hat{z}(t_0,\alpha)\}<r_{\max}(A)$.

定理8去掉了引理3中的条件 $\max(\max\limits_{j\in\alpha} r(A),r_{\max}(A[\beta]))<\min\limits_{i\in\beta} r_i(A)$ 和 $r_{\min}(A[\alpha,\beta])>0$,得到相同的结论.

例2 设 $A=\begin{pmatrix}1&4&2&3\\2&1&5&3\\1&1&1&1\\2&1&2&0\end{pmatrix}$,取 $\alpha=\{2,4\}$ 由于 A 不满足 $\max(\max\limits_{j\in\beta} r(A),r_{\max}(A[\alpha]))<\min\limits_{i\in\alpha} r_i(A)$,故不能应用引理3进行估计,但满足定理8的条件. 事实上,计算得 $r_{\max}(A)=11$, $r_{\min}(A)=4$, $\max\limits_{j\in\beta} r_j(A)=10$. 取 $t_0=10.5$. 计算得 $\hat{z}(t_0,\beta)=4.770\ 5$, $\max\{t_0,\hat{z}(t_0,\beta)\}=10.5$.

由定理8得 $\rho(A)\leqslant 10.5$. 由定理1得 $\rho(A)<11$. 故定理8改进了定理1的结论.

定理9[2] 设 A 是非负不可约方阵,则:

(a) $\rho(A)>0$ 是 A 的特征根.

(b) A 存在正特征向量 $v>0$ 与 $\rho(A)$ 相对应.

(c) 当 A 中任何元素增加时,$\rho(A)$ 也增加.

(d) $\rho(A)$ 是 A 的单特征值.

定理10 设 A 是非负不可约矩阵,取 $\alpha\subset N=\{1,2,\cdots,n\}$, $\beta=N\backslash\alpha$,使得 $r_{\min}(A[\beta])>r_{\min}(A)$,则 $\rho(A)>r_{\min}(A[\beta])>r_{\min}(A)$.

证明 A 的广义 Perron 补为 $P_t\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)=A[\beta]+A[\beta,\alpha](tI-A[\alpha])^{-1}A[\alpha,\beta]$. 由引理1知 $P_t\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)$ 为非负不可约矩阵,由定理9(c)知 $\rho\left(P_t\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)>\rho(A[\beta])\right)$,由条件 $r_{\min}(A[\beta])>r_{\min}(A)$ 知 $\rho\left(P_t\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)>\rho(A[\beta])\right)\geqslant r_{\min}(A[\beta])>r_{\min}(A)$. 取 $t>\rho(A)$,由定理3知 $\rho(A)>\left(P_t\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)\right)$,故 $\rho(A)>r_{\min}(A[\beta])>r_{\min}(A)$.

定理10改进了定理1的结果,且在计算过程中没有涉及 A 的广义 Perron 补.

例3 设 $A=\begin{pmatrix}2&4&5&1&2&4\\1&1&4&5&2&1\\1&1&1&0&1&2\\7&1&2&5&8&6\\1&0&2&4&5&6\\4&5&6&2&1&4\end{pmatrix}$,取 $\beta=\{1,2,4,6\}$,得 $A[\beta]=\begin{pmatrix}2&4&1&4\\1&1&5&1\\7&1&8&6\\4&5&2&4\end{pmatrix}$,由计算知 $r_{\min}(A[\beta])=$

$8, r_{\min}(A)=6, \rho(A)=17.7152$，故满足定理 10 的条件.

由定理 10 得 $\rho(A)>8$. 由定理 1 得 $\rho(A)>6$. 由此知定理 10 改进了定理 1 的结论.

在文献[5]中，作者指出，当 $|\alpha|$ 的阶数小时，$(tI-A[\alpha])^{-1}$ 容易计算，即广义 Perron 补也容易计算，所以一般情况下取 $\alpha=\{s\}=\{j \mid r_j=r_{\min}(A)\}$. 在文献[4]中给出下面定理：

定理 11[5]　假设 A 是一个不可约非负矩阵，$\alpha=\{s\}=\{j \mid r_j=r_{\min}(A)\}$，$\beta=[n]\backslash\{s\}$，令 $c=r_{\max}(A)$ 和 $d=\dfrac{r_{\min}(A)-a_{ss}}{c-a_{ss}}$. 如果 $\min\limits_{j\in\beta}(r_j(A[\beta])+d*a_{j,s})>r_{\min}(A)$，则

$$r_{\min}\left(P_c\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)\right)>r_{\min}(A)$$

类似定理 11，取 $\bar{\alpha}=\{t\}=\{i \mid r_i=r_{\max}(A)\}$，得到下面定理.

定理 12　设 A 是非负不可约矩阵，$\bar{\alpha}=\{t\}=\{i \mid r_i=r_{\max}(A)\}$，$\bar{\beta}=[n]\backslash\{t\}$，记 $\bar{c}=r_{\min}(A)>a_{tt}$ 和 $\bar{d}=\dfrac{r_{\max}(A)-a_{tt}}{\bar{c}-a_{tt}}$. 如果 $\max\limits_{j\in\beta}(r_j(A[\bar{\beta}])+da_{j,t})<r_{\max}(A)$，则 $r_{\max}(P_{\bar{c}}(\dfrac{A}{A[\bar{\alpha}]}))<r_{\max}(A)$.

证明　由广义 Perron 补的定义知 $P_{\bar{c}}\left(\dfrac{A}{A[\bar{\alpha}]}\right)=\dfrac{A[\bar{\beta}]+A[\bar{\beta},t]A[t,\bar{\beta}]}{\bar{c}-a_{tt}}$. 计算得

$$r_{\max}\left(P_{\bar{c}}\left(\frac{A}{A[\bar{\alpha}]}\right)\right)=\max_{j\in\beta}(r_j(A[\bar{\beta}])+d*a_{j,t})<r_{\max}(A)$$

由定理 11 和定理 12 得下面定理：

定理 13　假设 A 是一个非负不可约矩阵，记

$$\alpha=\{s\}=\{j \mid r_j=r_{\min}(A)\}, \bar{\alpha}=\{t\}=\{i \mid r_i=r_{\max}(A)\}$$
$$\beta=[n]\backslash\{s\}, \bar{\beta}=[n]\backslash\{t\}$$
$$c=r_{\max}(A), \bar{c}=r_{\min}(A)>a_{tt}$$
$$d=\frac{r_{\min}(A)-a_{ss}}{c-a_{ss}}, \bar{d}=\frac{r_{\max}(A)-a_{tt}}{\bar{c}-a_{tt}}$$

如果 $\min\limits_{j\in\beta}(r_j(A[\beta])+d*a_{j,s})>r_{\min}(A)$，$\max\limits_{j\in\bar{\beta}}(r_j(A[\bar{\beta}])+da_{j,t})<r_{\max}(A)$，则

$$r_{\min}(A)<r_{\min}\left(P_c\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)\right)<\rho(A)<r_{\max}\left(P_{\bar{c}}\left(\frac{A}{A[\bar{\alpha}]}\right)\right)<r_{\max}(A)$$

证明　因 $\min\limits_{j\in\beta}(r_j(A[\beta])+d*a_{j,s})>r_{\min}(A)$，由定理 11 知 $r_{\min}\left(P_c\left(\dfrac{A}{A[\alpha]}\right)\right)>r_{\min}(A)$，由 $\rho(A)<c$，由定理 3 知 $\rho(A)>\rho\left(P_c\left(\dfrac{A}{A[\bar{\alpha}]}\right)\right)>r_{\min}\left(P_c\left(\dfrac{A}{A[\bar{\alpha}]}\right)\right)>r_{\min}(A)$.

同理，因 $\max\limits_{j\in\bar{\beta}}(r_j(A[\bar{\beta}])+da_{j,t})<r_{\max}(A)$，由定理 12 知 $r_{\max}(P_{\bar{c}}(\dfrac{A}{A[\bar{\alpha}]}))<r_{\max}(A)$.

由 $\rho(A)>\bar{c}=r_{\min}(A)>a_{tt}$ 及定理 3 知 $\rho(A)<\rho\left(P_{\bar{c}}\left(\dfrac{A}{A[\bar{\alpha}]}\right)\right)<r_{\max}\left(P_c\left(\dfrac{A}{A[\bar{\alpha}]}\right)\right)<r_{\max}(A)$，故：

$$r_{\min}(A)<r_{\min}\left(P_c\left(\frac{A}{A[\alpha]}\right)\right)<\rho(A)<r_{\max}\left(P_{\bar{c}}\left(\frac{A}{A[\bar{\alpha}]}\right)\right)<r_{\max}(A)$$

例 4　设 $A=\begin{pmatrix}1&1&2&2\\4&1&4&3\\1&0&2&2\\1&1&0&1\end{pmatrix}$，则 $\alpha=\{s\}=\{4\}$，$\bar{\alpha}=\{t\}=\{2\}$，$c=r_{\max}(A)=12$，$\bar{c}=r_{\min}(A)=3$，计算得 $\min\limits_{j\in\beta}(r_j(A[\beta]+d*a_{js})=3.3636$，即 $\min\limits_{j\in\beta}(r_j(A[\beta]+d*a_{js})>r_{\min}(A)$，$\max\limits_{j\in\bar{\beta}}(r_j(A[\bar{\beta}]+\bar{d}*a_{jt})=10.5$，即 $\max\limits_{j\in\bar{\beta}}(r_j(A[\bar{\beta}]+\bar{d}*a_{js})<r_{\max}(A)$，满足定理 13 的条件.

由定理13计算得 $3.3636<\rho(A)<10.5$. 由定理1得 $3<\rho(A)<12$. 由此知定理13改进了定理1的结论.

参考文献:

[1] MEYER C D. Uncoupling in the Perron Eigenvector Problem[J]. Linear Algebra Appl,1989,114/115:69-94

[2] 黄廷祝,杨传胜. 特殊矩阵分析与应用[M]. 北京:科学出版社,2007

[3] BRAUER A. The theorems of Ledermann and Ostrowski on Positive matrices[J]. Duke Math J,1950,25:265-274

[4] LU L Z. Perron complement and Perron root[J]. Linear Algebra Appl,2002,341:239-248

[5] HUANG G X,YIN F,GUO K. The lower and upper bounds on Perron root of nonnegative irreducible matrices[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics,2008,217:259-267

[6] LU L Z,NG M K. Locations of Perron roots[J]. Linear Algebra Appl,2004,392:103-117

[7] 蔡占通,李耀堂. 对称矩阵具有强 Perron-Frobenius 性质的条件[J]. 延安大学学报:自然科学版,2010(1):1-5

[8] 张丛,马丽宾,匡德胜. 矩阵最小奇异值下界的一种估计[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011(6):238-240

Improving Estimation for Perron Root Bound of Nonnegative Matrices

CAI Zhan-tong, DUAN Yan-hui

(School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China;
Handan College, Department of Mathematics, Hebei Handan 056001, China)

Abstract: Spectral radius of matrix plays an extremely important role in characteristic value estimation theory, generalized inverse matrix, numerical analysis, matrix sequence, matrix series convergence analysis and control theory, so that in recent years, many scholars are committed to conduct research in this area and put forward a number of improved spectral radius estimation methods. It is widely valued by a great many of scholars to use generalized Perron complement matrix to estimate spectral radius. By studying the properties of generalized Perron complement, this paper gives several new estimation expressions of Perron root bound.

Key words: nonnegative matrices; generalized Perron complement; irreducibility; Perron root

责任编辑:李翠薇