文章编号:1672 - 058X(2012)04 - 0007 - 04

二阶中立型微分方程的周期解

许 宗 琴
(安徽大学 数学科学学院,合肥 230039)

摘 要: 应用 Krasnoselskii 不动点理论,研究了一类二阶中立型微分方程 $[x(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i x(t-\tau_i)]''=a(t)x(t)-f(t,x(t-\sigma(t)))$ 周期解的存在性.

关键词: 中立型泛函微分方程;周期解;Krasnoselskii 不动点定理
中图分类号: O175.1 **文献标志码:** A

中立型微分方程在生物学、经济学、力学等方面都有比较广泛深入的应用. 其中研究中立型泛函微分方程周期解的存在性方法, 概括起来有: 不动点定理、重合度理论和 Lyapunov 泛函的方法[1-5]. 利用 Krasnoselskii 不动点理论及分析的方法,讨论更一般形式的中立型泛函微分方程

$$[x(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i x(t-\tau_i)]''=a(t)x(t)-f(t,x(t-\sigma(t))) \tag{1}$$

周期解的存在性. 其中:$\sigma\in C(R,R)$;$f\in C(R\times[0,+\infty),[0,+\infty))$; $a\in C(R,R^+)$; a,f,σ 关于 t 是 T 周期函数,$\tau_i>0(i=1,2,\cdots,n)$为常量.

1 预备知识

设 $X=\{x(t)\in C(R,R)\mid x(t+T)=x(t),t\in R\}$,定义其范数为 $\|x\|=\sup_{t\in[0,T]}|x(t)|$. 显然,集合 X 是以 $\|x\|$ 为范数的 Banach 空间. 定义

$$C_T^+=\{x(t)\in C(R,(-\infty,0)):x(t+T)=x(t)\}$$

$$K=\left\{x(t)\in C(R,R)\mid x(t)\in X,0\leqslant\|x\|\leqslant\frac{1}{m}\right\}$$

记号:

$$M=\max_{t\in[0,T]}a(t),m=\min_{t\in[0,T]}a(t),\beta=\sqrt{M}$$

$$L=\frac{e^{-\frac{\beta T}{2}}}{\beta(1-e^{-\beta T})},l=\frac{1+e^{-\beta T}}{2\beta(1-e^{-\beta T})}$$

引理 1[6] (Krasnoselskii 不动点定理) 设 K 是 Banach 空间 X 的有界凸闭集,映射 $Q:K\to K$ 和 $S:K\to K$ 满足条件:(ⅰ)任意的 $x,y\in K$,有 $Qx+Sy\in K$;(ⅱ)S 是压缩算子,Q 是 K 中的全连续算子. 则 $Q+S$ 在 K 中存在一个不动点.

引理 2 方程

收稿日期: 2011 - 09 - 18;**修回日期:** 2011 - 11 - 07.
作者简介: 许宗琴(1986-),女,安徽滁州人,硕士研究生,从事泛函微分方程研究.

$$y''(t) - My(t) = h(t), h \in C_T^- \tag{2}$$

有唯一 T -周期解

$$y(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)(-h(t))\mathrm{d}s \tag{3}$$

其中

$$G(t,s) = \frac{\mathrm{e}^{-\beta(s-t)} + \mathrm{e}^{\beta(s-t-T)}}{2\beta(1-\mathrm{e}^{-\beta T})}, s \in (t, t+T) \tag{4}$$

易见,$\forall t \in [0,T], s \in [t, t+T]$,有

$$\int_t^{t+T} G(t,s)\mathrm{d}s = \frac{1}{M} \text{ 且 } 0 < L \leqslant G(t,s) \leqslant l$$

其中,

$$\int_t^{t+T} G(t,s)\mathrm{d}s = \int_t^{t+T} \frac{\mathrm{e}^{-\beta(s-t)} + \mathrm{e}^{\beta(s-t-T)}}{2\beta(1-\mathrm{e}^{-\beta T})}\mathrm{d}s =$$

$$\frac{1}{2\beta(1-\mathrm{e}^{-\beta T})}\left[-\frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{-\beta(s-t)} + \frac{1}{\beta}\mathrm{e}^{\beta(s-t-T)}\right]\Big|_t^{t+T} =$$

$$\frac{1}{2\beta(1-\mathrm{e}^{-\beta T})}\left[-\frac{1}{\beta}(\mathrm{e}^{-\beta T}-1) + \frac{1}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta T})\right] =$$

$$\frac{1}{2\beta(1-\mathrm{e}^{-\beta T})} \cdot \frac{2}{\beta}(1-\mathrm{e}^{-\beta T}) = \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{M}$$

现在考虑下面方程

$$y''(t) - a(t)y(t) = h(t), h \in C_T^- \tag{5}$$

由定义

$$T, B: X \to X, (Th)(t) = \int_t^{t+T} G(t,s)(-h(s))\mathrm{d}s, (By)(t) = [-M + a(t)]y(t) \tag{6}$$

易知,T,B 是全连续的,当 $h(t) < 0$ 时,$(Th)(t) > 0$.

对 $\forall h \in C[0,T]$,有 $|(Th)(t)| \leqslant \int_0^T G(t,s)|-h(s)|\mathrm{d}s \leqslant \frac{1}{M}\|h\|$,所以 $\|Th\| \leqslant \frac{1}{M}\|h\|$.

另一方面,取 $h_0(t) \equiv 1$,则 $(Th_0)(t) \equiv \int_0^T G(t,s)\mathrm{d}s = \frac{1}{M}$,故 $\|Th_0\| = \frac{1}{M}$. 因此 $\|T\| = \frac{1}{M}$,T 为正算子,且 $B: C[0,T] \to C[0,T]$ 为正线性有界算子,其范数 $\|B\| \leqslant M - m$.

由引理 2,式(5)改写为

$$y(t) = (Th)(t) + (TBy)(t) \tag{7}$$

又

$$\|TB\| \leqslant \|T\|\,\|B\| \leqslant \frac{M-m}{M} = 1 - \frac{m}{M} < 1 \tag{8}$$

因此,$(I-TB)$ 存在有界逆 $(I-TB)^{-1}$,故方程(7)存在唯一解

$$y(t) = (I-TB)^{-1}Th(t) \triangleq Ph(t)$$

其中 $P = (I-TB)^{-1}T$. 显然,$y(t) = (Ph)(t)$ 是式(5)的唯一 T-周期解.

引理 3 P 是全连续算子且满足

$$(Th)(t) \leqslant (Ph)(t) \leqslant \frac{M}{m}\|(Th)(t)\|, h \in C_T^- \tag{9}$$

证明 由 Neumann 展式

$$P = (I + TB + \cdots (TB)^n + \cdots)T = T + TBT + \cdots (TB)^n T + \cdots \tag{10}$$

因为 T 为线性全连续算子,故 $P: C[0,T] \to C[0,T]$ 为线性全连续算子.

对 $\forall h \in C[0,T]$,当 $h < 0$ 时,因为 T,B 均为正算子,由式(10)知

$$Ph = Th + (TBT)h + \cdots (TB)^n Th + \cdots \geqslant Th$$

$$Ph \leqslant \| Ph \| \leqslant \| (I - TB)^{-1} \| \cdot \| Th \| \leqslant \left(\sum_{n=0}^{\infty} \| TB \|^n \right) \| Th \| \leqslant$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} (\| T \| \cdot \| B \|)^n \right) \| Th \| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{M - m}{M} \right)^n \| Th \| = \frac{M}{m} \| Th \|$$

因此式(9)成立. 证毕.

现在考虑方程(1),它可写成如下形式

$$\left[x(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i x(t - \tau_i) \right]'' =$$

$$a(t)\left[x(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i x(t - \tau_i) \right] - a(t) \sum_{i=1}^{n} c_i x(t - \tau_i) - f(t, x(t - \sigma(t))) \tag{11}$$

令 $y(t) = x(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i x(t - \tau_i)$, 则式(11)改写成

$$y''(t) - a(t)y(t) = -a(t) \sum_{i=1}^{n} c_i x(t - \tau_i) - f(t, x(t - \sigma(t))) \tag{12}$$

定义算子 $Q, B: X \to X$,

$$(Qx)(t) = P\left(-a(t) \sum_{i=1}^{n} c_i x(t - \tau_i) - f(t, x(t - \sigma(t))) \right)$$

$$(Sx)(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i x(t - \tau_i) \tag{13}$$

观察式(12)与式(5),可知式(1)的周期解存在性等价于厦门算子方程在 X 中解的存在性,

$$Qx + Sx = x \tag{14}$$

由于 P 为全连续算子,则知 Q 在 X 中是全连续的.

引理 4　若 $\sum_{i=1}^{n} |c_i| < 1$, 则 S 是压缩的.

$$\| (Sx_1)(t) - (Sx_2)(t) \| = \left| \sum_{i=1}^{n} c_i u_2(t - \tau_i) - \sum_{i=1}^{n} c_i u_1(t - \tau_i) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |c_i| \, \| u_1 - u_2 \|$$

因为 $\sum_{i=1}^{n} |c_i| < 1$,所以 S 是压缩的.

定理 1　对于微分方程(1),如果条件

(H1)
$$0 < \| f \| \leqslant 1 - \frac{(M + m) \sum_{i=1}^{n} |c_i|}{M}$$

成立,则微分方程存在 T 周期解.

证明　(i) K 为有界凸闭集,任给 $x(t), y(t) \in K$ 及 $\lambda \in (0,1)$,得

$$\lambda x(t + T) + (1 - \lambda) y(t + T) = \lambda x(t) + (1 - \lambda) y(t)$$

$$\| \lambda x(t + T) + (1 - \lambda) y(t + T) \| = \| \lambda x(t) + (1 - \lambda) y(t) \| \leqslant \frac{1}{m}$$

即 K 是凸的. 若函数列 $\{x_n(t)\} \subseteq K$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x_0 \| = 0$,根据下列不等式

$$\| x_0 \| \leqslant \| x_0 - x_n \| + \| x_n \| \leqslant \| x_0 - x_n \| + \frac{1}{m} | x_0(t + T) - x_0(t) | \leqslant$$

$$| x_0(t + T) - x_n(t + T) | + | x_n(t) - x_0(t) | + | x_n(t + T) - x_n(t) | \leqslant$$

$$2 \| x_n - x_0 \|$$

可以得到 $\|x_0\| \leqslant K, x_0(t+T)=x_0(t)$,即 $x_0(t)\in K$,于是 K 为闭集,其有界性是显然的. 所以,综合以上的证明,K 为有界凸闭集.

(ⅱ) 任意 $x,y\in K$,可以证明 $Qx+Sy\in K$.

$$
\begin{aligned}
&(Qx)(t)+(Sy)(t)= \\
&P\Big(-a(t)\sum_{i=1}^{n}c_ix(t-\tau_i)-f(t,x(t-\sigma(t)))\Big)+\sum_{i=1}^{n}c_iy(t-\tau_i)\leqslant \\
&\frac{M}{m}\Big\|T\Big(-a(t)\sum_{i=1}^{n}c_ix(t-\tau_i)-f(t,x(t-\sigma(t)))\Big)\Big\|+\sum_{i=1}^{n}|c_i|y(t-\tau_i)\leqslant \\
&\frac{M}{m}\max_{t\in[0,T]}\Big|\int_t^{t+T}G(t,s)\Big(-a(t)\sum_{i=1}^{n}c_ix(t-\tau_i)-f(t,x(t-\sigma(t)))\Big)\mathrm{d}s\Big|+\sum_{i=1}^{n}|c_i|y(t-\tau_i)\leqslant \\
&\frac{M}{m}\max_{t\in[0,T]}\int_t^{t+T}G(t,s)\Big(a(t)\sum_{i=1}^{n}c_ix(t-\tau_i)+f(t,x(t-\sigma(t)))\Big)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{n}|c_i|y(t-\tau_i)\leqslant \\
&\frac{M}{m}\int_t^{t+T}G(t,s)\Big(\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot M\cdot\frac{1}{m}+\|f\|\Big)\mathrm{d}s+\frac{\sum_{i=1}^{n}|c_i|}{m}= \\
&\frac{M}{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}|c_i|\cdot M\cdot\frac{1}{m}+\|f\|\Big)\cdot\frac{1}{M}+\frac{\sum_{i=1}^{n}|c_i|}{m}=\frac{1}{m}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

另一方面,

$$
\begin{aligned}
(Qx)(t)+(Sy)(t)&=P\Big(-a(t)\sum_{i=1}^{n}c_ix(t-\tau_i)-f(t,x(t-\sigma(t)))\Big)+\sum_{i=1}^{n}c_iy(t-\tau_i)\geqslant \\
&\Big\|T\Big(-a(t)\sum_{i=1}^{n}c_ix(t-\tau_i)-f(t,x(t-\sigma(t)))\Big)\Big\|+\sum_{i=1}^{n}c_iy(t-\tau_i)\geqslant \\
&\int_t^{t+T}G(t,s)\Big(a(t)\sum_{i=1}^{n}c_ix(t-\tau_i)+f(t,x(t-\sigma(t)))\Big)\mathrm{d}s+\sum_{i=1}^{n}c_iy(t-\tau_i)\geqslant \\
&\frac{1}{M}\Big(m\cdot 0\cdot\sum_{i=1}^{n}c_i-0\Big)=0
\end{aligned}
\tag{16}
$$

结合式(15)和式(16)可知,对于任意 $x,y\in K$,有 $Qx+Sy\in K$.

因此,由引理1知,微分方程(1)有一 T-周期解 $x(t)$,且 $0\leqslant\|x(t)\|\leqslant\dfrac{1}{m}$.

参考文献:

[1] HALE J K. Theory of Functional Differential Equations[M]. New York:Springer-Verlag,1997

[2] ZHENG Z X. Theory of Functional Differential Equations[M]. Anhui Educational Publishing House,Hefei,1994

[3] LI F Y, LIANG Z P. Existence of positive periodic solutions to nonlinear second order differential equations[J]. Applied Mathematics Letters,2005(18):1256-1264

[4] YOU B L. Ordinary Differential Equation Complementary Curriculum[M]. People Education Press,Beijing,1982

[5] 鲁世平,葛渭高. 一类二阶具偏差变元的微分方程周期解[J]. 数学学报,2002,45(4):811-818

[6] 李永祥. 二阶非线性常微分方程的正周期解[J]. 数学学报,2002,45(3):481-488

(下转第19页)