文章编号:1672 - 058X(2012)04 - 0001 - 06

Fermat 猜想的证明

李 焕 兵
(河北科技大学 老干部处,石家庄 050054)

摘 要:猜想原本为:当 $n\geqslant 3$,$x^n+y^n=z^n$,$x>0$,$y>0$,$z>0$ 没有整数解. 将猜想变为:设 n,y,z 均为正整数,且 $n\geqslant 3$,$y<z$,则方程 $z^n+y^n-x^n=0$ 中的 x 为非整数,给予证明.

关键词:非零数码;等价无穷小;跳跃式单增

中图分类号:O 172 **文献标志码**: A

定理 1 设 n,c,j 均为正整数,且 $n\geqslant 3$,$j<c$,则方程:

$$c^n-(c-j)^n-(c-x)^n=0,x\in(o,c) \tag{1}$$

中的未知数 x 必不为整数.

证明 令 $F(x)=c^n-(c-j)^n-(c-x)^n$,$x\in(0,c)$,经计算知 $F(0)<0$,$F(c)>0$,$F'(x)>0$,$F''(x)<0$,$x\in(o,c)$,从而由文献[1]中第 144 节可知,方程 $F(x)=0$ 在$(0,c)$内有唯一实根(令为 ξ). 而且存在 ξ 的弦截法近似值序列$\{u_i\}$,使下面两式成立:

$$0<\xi<u_{i+1}<u_i<c,i=1,2,\cdots \tag{2}$$

$$\xi=\lim_{i\to+\infty}u_i,\xi\in(0,c) \tag{3}$$

按照弦截法,若将 $a=0$,$b=c$ 代入:

$$u=a-\frac{(b-a)F(a)}{F(b)-F(a)} \tag{4}$$

可得:

$$u_1=c(c-\frac{j}{c})^n \tag{5}$$

将 $a=0$,$b=u_1$ 代入式(4),可得:

$$u_2=\frac{u_1(c-j)^n}{c^n-(c-u_1)^n}$$

依此类推,可得:

$$u_{i+i}=\frac{u_i(c-j)^n}{c^n-(c-u_i)^n}$$

$$\vdots$$

令

$$\varphi(x)=\frac{(c-j)^n}{c^n-(c-x)^n},x>0 \tag{6}$$

收稿日期:2011 - 11 - 17;**修回日期**:2011 - 12 - 10.

作者简介:李焕兵(1938-),男,河北赞皇人,副教授,从事数学分析研究.

则对于由式(2)给出的 $u_i, i=1,2,\cdots$,有 $u_2=u_1\varphi(u_1), u_3=u_2\varphi(u_2), \cdots, u_{i+1}=u_i\varphi(u_i), \cdots$,令:

$$t_i = \varphi(u_i), i = 1,2,\cdots \tag{7}$$

则式(7)可变为:

$$u_2 = u_1 t_1, u_3 = u_2 t_2, \cdots, u_{i+1} = u_i t_i, \cdots \tag{8}$$

于是 $u_2=u_1t_1, u_3=u_1t_1t_2, \cdots, u_{i+1}=u_1t_1t_2\cdots t_i, \cdots$. 或:

$$u_{i+1} = u_1 \prod_{k=1}^{i} t_k, i = 1,2,\cdots \tag{9}$$

由式(8)知:

$$t_i = \frac{u_{i+1}}{u_i}, i = 1,2,\cdots \tag{10}$$

对式(6)求导:

$$\varphi'(x) = \frac{-n(c-j)^n(c-x)^{n-1}}{[c^n-(c-x)^n]^2} < 0, x \in (0,c) \tag{11}$$

式(11)表示当 x 单增时,$\varphi(x)$ 的值单减. 故对于由式(2)给出的单减序列 $\{u_i\}$,成立不等式:

$$\varphi(u_i) < \varphi(u_{i+1}), 0 < \xi < u_{i+1} < u_i < C, i = 1,2,\cdots$$

将式(7)代入,可得:

$$t_i < t_{i+1}, i = 1,2,\cdots \tag{12}$$

将式(10)代入式(12),得:

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} < \frac{u_{i+2}}{u_{i+1}}, i = 1,2,\cdots \tag{13}$$

式(13)两端同减去 1,亦即 $\frac{u_{i+1}}{u_i}-\frac{u_i}{u_i}<\frac{u_{i+2}}{u_{i+1}}-\frac{u_{i+1}}{u_{i+1}}, i=1,2,\cdots$,于是:

$$\frac{u_{i+1}-u_i}{u_i} < \frac{u_{i+2}-u_{i+1}}{u_{i+1}}, i = 1,2,\cdots \tag{14}$$

因由式(2)知,式(14)中小于号两端的分子均为负值,而分母却均为正值,且 $u_i>u_{i+1}, i=1,2,\cdots$,故仅当:

$$u_{i+1} - u_i < u_{i+2} - u_{i+1} < 0, i = 1,2,\cdots \tag{15}$$

成立时,式(14)才成立.

由式(2)还可得:

$$0 < \frac{u_{i+1}}{u_i} < 1, i = 1,2,\cdots \tag{16}$$

将式(10)代入式(16),再跟式(12)联立,可得:

$$0 < t_i < t_{i+1} < 1, i = 1,2,\cdots \tag{17}$$

由式(3)(10)知

$$\lim_{i\to+\infty} t_i = 1 \tag{18}$$

$$\tau_i = 1 - t_i, i = 1,2,\cdots \tag{19}$$

则由式(16)知:

$$0 < \tau_{i+1} < \tau_i < 1, i = 1,2,\cdots \tag{20}$$

由式(18)(19)知:

$$\lim_{i\to+\infty} \tau_i = 0 \tag{21}$$

于是,存在正整数 N_1,使当 $i \geqslant N_1$ 时,不但可将 τ_i 表达为:

$$\tau_i = 0.\overbrace{00\cdots0}^{s_i}\lambda_{i,1},\lambda_{i,2},\cdots,s_i \geqslant 1,i \leqslant N_1$$
$$(\lambda_{i,j} \in \{0,1,2,\cdots,9\},j = 1,2,\cdots,i \geqslant N_1,\text{但 } \lambda_{i,1} \neq 0) \tag{22}$$

并且,式中的正整数 S_i 满足不等式:

$$1 \leqslant S_i \leqslant S_{i+1},i \geqslant N_1 \tag{23}$$

由式(21)(22)(23)可得:

$$\lim_{i \to +\infty} S_i = +\infty \tag{24}$$

式(22)可表示为:

$$\tau_i = \lambda_i 10^{-(S_i+1)},\lambda_i = \lambda_{i,1} \cdot \lambda_{i,2}\lambda_{i,3} \cdot \cdots,i \geqslant N_1 \tag{25}$$

式(25)两端取对数,可得:

$$S_i + 1 = \lg \lambda_i - \lg \tau_i,\lambda_i = \lambda_{i,1} \cdot \lambda_{i,2}\cdots,i \geqslant N_1 \tag{26}$$

因序列 $\{u_i\}$ 满足式(2)(3)(15),故可通过点列 (i,u_i),$i = 1,2,\cdots$,在 xoy 坐标系的第一象限画出一条单减、向上凹、以 $y = \xi$ 为渐近线的光滑曲线. 并可令这条曲线为连续、可导函数 $y = u(x)$ 的图像. 于是:

$$u(x)\big|_{x=i} = u_i,i = 1,2,\cdots \tag{27}$$

从而可将式(2)(3)(15)推广为:

$$0 < \xi < u(x+r) < u(x) < c,x > 0,r > 0 \tag{28}$$

$$\xi = \lim_{x \to +\infty} u(x),\xi \in (0,c) \tag{29}$$

$$u(x_1 + r) - u(x_1) < u(x_2 + r) - u(x_2) < 0,0 < x_1 < x_2 \tag{30}$$

因 $u(x)$,$x > 0$ 具有以上性质,故由文献[2]知:

$$u'(x) < u'(x+r) < 0,x > 0,r > 0 \tag{31}$$

从而又可将式(7)(17)(18)依次推广为:

$$t(x) = \varphi[u(x)],x > 0 \tag{32}$$

$$\tau(x) = 1 - t(x),x > 0 \tag{33}$$

$$0 < t(x_1) < t(x_2) < 1,0 < x_1 < x_2 \tag{34}$$

由式(11)可知:

$$\varphi'(u) < 0,0 < \xi < u < c \tag{35}$$

因式(31)(32)(35)成立,故可得:

$$t'(x) = \varphi'(u)u'(x) > 0,x > 0 \tag{36}$$

$$\lg \lambda(x) = \begin{cases} \lg \lambda_1,1 \leqslant x < 2 \\ \lg \lambda_2,2 \leqslant x < 3 \\ \vdots \\ \lg \lambda_k,k \leqslant x < k+1 \\ \vdots \end{cases}$$

并令 $[\lg \lambda(x)]'$ 在可去间断点处的值为零,则可得 $[\lg \lambda(x)]' = 0,x > 0$.

于是,可将式(26)推广为:

$$s(x) + 1 = \lg \lambda(x) - \lg \tau(x),x > 0 \tag{37}$$

并且可得:

$$S'(x)=-\frac{\tau'(x)}{\tau(x)}\quad\frac{1}{\ln 10}=-\frac{-t'(x)}{1-t(x)}\frac{1}{\ln 10},x>0 \tag{38}$$

将 $\varphi'(u)$ 的表达式代入式(36),再代入式(38)末端的分子. 经整理可得:

$$S'(x)=\frac{n(c-j)^n}{\ln 10}\frac{[c-u(x)]^{n-1}[-u'(x)]}{[1-t(x)]\{c^n-[c-u(x)]^n\}^2},x>0 \tag{39}$$

于是 $S'(x+r)=\dfrac{n(c-j)^n}{\ln 10}\dfrac{\{c-u(x+r)]^{n-1}(-u'(x+r))\}}{[1-t(x+r)]\{c^n-[c-u(x+r)]^n\}^2},x>0,r>0.$

因 n,j,c 均为常数,且 $j<c$,$\ln 10$ 亦为正的常数,故式(39)中$\dfrac{n(c-j)^n}{\ln 10}>0$ 为常数. 同时由式(29)知:

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{c-u(x)}{c-u(x+r)}=1$$

由式(31)知,$u'(x)$ 为负数、单增而且有上界,故存在实数 $g\leqslant 0$,使得 $\lim\limits_{x\to+\infty}u'(x)=g,g\leqslant 0.$

于是,可由文献[2]中式(10)得知 $\lim\limits_{i\to+\infty}\dfrac{u'(x)}{u'(x+r)}=1$,故:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{[c-u(x)^{n-1}[-u'(x)]}{[c-u(x+r)]^{n-1}[-u'(x+1)]}=\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{c-u(x)}{c-u(x+r)}\right]^{n-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{u'(x)}{u'(x+r)}=1 \tag{40}$$

因式(34)成立,故:

$$1-t(x)>1-t(x+r)>0,x>0,r>0 \tag{41}$$

因式(29)成立,故:

$$c^n-[c-u(x)]^n>c^n-[c-u(x+r)]^n>0,x>0,r>0 \tag{42}$$

由式(41)(42)知,$S'(x+r)$ 的表达式中的分母小于 $S'(x)$ 的表达式中的分母. 由式(40)知,$S'(x+r)$ 的表达式中的分子与 $S'(x)$ 的表达式中的分子可无限逼近. 于是,总能找到正整数 $N_2>N_1$,使当 $x\geqslant N_2$,$S'(x+r)>S'(x)$,并且由式(39)知 $S'(x)>0$. 于是:

$$S'(x+r)>S'(x)>0,x\geqslant N_2 \tag{43}$$

此时若令:

$$f(x)=s(x+r)-s(x),x\geqslant N_2,r>0 \tag{44}$$

$$f'(x)=S'(x+r)-S'(x)>0,x>N_2,r>0 \tag{45}$$

因 $f'(x)>0,x>N_2$,故 $f(x+r)>f(x),x>N_2,r>0.$

将式(44)代入 $f(x+r)>f(x)$,可得:

$$S(x+2r)-S(x+r)>S(x+r)-S(x)>0,x>N_2,r>0 \tag{46}$$

因式(37)由式(26)推广而来,故 $S(i)=S_i$,于是若令式(46)中的 $x=i,r=1$,则可得:

$$S_{i+2}-S_{i+1}>S_{i+1}-S_i>0,i>N_2 \tag{47}$$

下面证明式(3)中的 ξ 必不为整数.

按以下两种情况进行证明:

(i) 当 $u_1\in(0,1]$,因由式(2)可知:

$$0<\xi<u_1 \tag{48}$$

故 ξ 必为小数.

(ii) 再证当 $u_1=(1,c)$ 时定理的结论也成立. 反证法,假设此时 ξ 为正整数,则因式(48)成立,故 $\xi\in\{1,2,\cdots,c-1\}$,此时可令 $\xi=\nu_1\nu_2\cdots\nu_J$,其中 $\nu_i\in\{0,1,2,\cdots,9\}$,$i=1,2,\cdots,J$,但 $\nu_1\neq 0$;显然 J 是 ξ 的位数.

而由式(2)(3)成立知,序列 $\{u_i\}$ 单减且无限逼近 ξ,故总可找到正整数 W,使 $i\geqslant w$ 时,$\{u_i\}$ 中各项不但

可表示为:

$$u_i = \nu_1\nu_2\cdots\nu_J \cdot \overbrace{00\cdots0}^{P_i}\eta_{i,1}\eta_{i,2}\cdots$$
$$(\text{式中 } \eta_{i,j} \in \{0,1,2,\cdots,9\}, i \geqslant w, j = 1,2,\cdots, \text{但 } \eta_{i,1} \neq 0) \tag{49}$$

而且,式(49)中表示小数点至其后第一个非零数码 $\eta_{i,1}$ 之间连续排列的零的个数序列 $\{p_i\}$ 满足以下两式:

$$1 \leqslant p_i \leqslant p_{i+1}, i \geqslant w; \lim_{i\to+\infty} p_i = +\infty$$

又因 $P_i(i=1,2,\cdots)$,仅取非负整数,故总能找到正整数 $\Omega > \max\{W, N_2\}$,使 u_Ω 于 $u_{\Omega+1}$ 的表达式中的 P_Ω, $P_{\Omega+1}$ 满足:

$$P_{\Omega+1} = P_\Omega + 1 \tag{50}$$

不失一般性,令:

$$\xi = v_1, p_\Omega = 0 \tag{51}$$

因由式(2)知 $u_{\Omega+1} > u_{\Omega+2}$,故当式(51)成立时,$p_{\Omega+2}$ 的最小值为 1,于是可令:

$$u_{\Omega+2} = v_1 \cdot 0\eta_{\Omega+2,1}\eta_{\Omega+2,2}\cdots, \eta_{\Omega+2,1} \neq 0 \tag{52}$$

若将式(19)代入式(8),可得 $u_2 = u_1(1-\tau_1), u_3 = u_2(1-\tau_2), \cdots, u_{i+1} = u_i(1-\tau_i), \cdots$,亦即:

$$u_{i+1} = u_i - u_i\tau_i, i = 1,2,\cdots \tag{53}$$

下面讨论式(53)中 $\tau_i, i=1,2,\cdots$ 的表达式中的 $s_i, i=1,2,\cdots$ 的性质. 由式(22)(23)(24)(47)知,非负整数序列 $\{S_i\}$,当 $i > N_1$ 时,$S_i \geqslant 1$;又当 $i > N_2 > N_1$ 时,v 按式(55)的规律跳跃式单增,且增幅越来越大,直至 $+\infty$;所以若按最低值假设(参见式(22)) $S_\Omega = 1$,对于式(47)所给出的增幅也按最低值:

$$S_{\Omega+1} - S_\Omega = 1, S_{\Omega+2} - S_{\Omega+1} = 2, S_{\Omega+3} - S_{\Omega+2} = 3, \cdots, S_{\Omega+k+1} - S_{\Omega+k} = k+1, \cdots$$

则有:

$$S_{\Omega+1} = 2, S_{\Omega+2} = 4, S_{\Omega+3} = 7, S_{\Omega+4} = 11, \cdots \tag{54}$$

由式(54)知 $s_{\Omega+2} = 4$,故可令:

$$\tau_{\Omega+2} = 0 \cdot 000\,0\lambda_{\Omega+2,1}\lambda_{\Omega+2,2}\cdots, \lambda_{\Omega+2,1} \neq 0$$

故若将 $u_{\Omega+2}\tau_{\Omega+2}$ 表示为:$u_{\Omega+2}\tau_{\Omega+2} = \overbrace{0.00\cdots}^{\gamma(\Omega+2)}0\beta_{\Omega+2,1}\beta_{\Omega+2,2}\cdots, \beta_{\Omega+2,1} \neq 0$,则 $\min\{\gamma(\Omega+2)\} = 4$,于是:

$$u(\Omega+3) = u_{\Omega+2} - u_{\Omega+2}\tau_{\Omega+2} = v_1 \cdot 00\eta_{\Omega+3,1}\eta_{\Omega+3,2}\cdots, \eta_{\Omega+3,1} \neq 0 \tag{55}$$

或 $u_{\Omega+3} = v_1 \cdot 0\eta_{\Omega+3,1}\eta_{\Omega+3,2}\cdots, \eta_{\Omega+3,1} \neq 0$.

又由式(54)可知 $S_{\Omega+3} = 7$,故可令 $\tau_{\Omega+3} = 0 \cdot \overbrace{00\cdots}^{7}0\lambda_{\Omega+3,1}\lambda_{\Omega+3,2}\cdots, \lambda_{\Omega+3,1} \neq 0$.

不失一般性,可得 $u_{\Omega+2}\tau_{\Omega+2} = 0.\overbrace{00\cdots}^{6}0\beta_{\Omega+3,1}\beta_{\Omega+3,2}\cdots, \beta_{\Omega+3,1} \neq 0$. 于是 $u_{\Omega+4} = u_{\Omega+3} - u_{\Omega+3}\tau_{\Omega+3} = v_1 \cdot 00\eta_{\Omega+3,1}\eta_{\Omega+3,2}\cdots, \eta_{\Omega+3,1} \neq 0$. 由式(54)知,$s_{\Omega+4} = 11$,于是:

$$\tau_{\Omega+4} = 0.\overbrace{00\cdots}^{11}0\lambda_{\Omega+4,1}\lambda_{\Omega+4,2}\cdots, \lambda_{\Omega+4} \neq 0$$

同理可得 $u_{\Omega+5}, \cdots$.

按上面求 $u_{\Omega+k}, k=1,2,\cdots$ 的方法一直计算下去,会发现从某项 $u_{\Omega+H_1}$(H_1 是个确定的正整数)开始,在其后面 $u_{\Omega+H_1+m}, m=1,2,\cdots$ 的表达式中,$p_{\Omega+H_1+m}, m=1,2,\cdots$ 及 $\eta_{\Omega+H_1+m}, m=1,2,\cdots$ 将分别与 $u_{\Omega+H_1}$ 的表达式中的 $p_{\Omega+H_1}$ 及 $\eta_{\Omega+H_1,1}$ 相等. 若令 $R = P_{\Omega+H_1}, Q_1 = \eta_{\Omega+H_1,1}$,则:

$$R = P_{\Omega+H_1} = P_{\Omega+H_1+m}, m = 1,2,\cdots \tag{56}$$

R 为某个确定的非负整数.

$$Q_1 = \eta_{\Omega+h_1,1} = \eta_{\Omega+H_1+m,1}, m = 1,2,\cdots \tag{57}$$

Q_1 为{1,2,…. ,9}中某个确定的数码.

从而 $u_{\Omega+H_1+m} = V_1.\overbrace{00\cdots0}^{R}Q_1\eta_{\Omega+H_1+m,2}\eta_{\Omega+H_1+m,3}\cdots, m=1,2,\cdots$.

在式(56)(57)成立的基础上,还能找到正整数 $H_2 \geqslant H_1$,使 $u_{\Omega+H_2+m}, m=1,2,\cdots$ 的表达式中,不但 $P_{\Omega+H_2+m}, m=0,1,2,\cdots$ 及 $\eta_{\Omega+H_2+m,1}, m=0,1,2,\cdots$ 满足:

$$P_{\Omega+H_2+m} = R, m = 0,1,2,\cdots, \eta_{\Omega+H_2+m,1} = Q_1, m = 0,1,2,\cdots$$

而且若以非负整数 Q_2 表示 $\eta_{\Omega+H_2,2}$,则 $\eta_{\Omega+H_2+m,2} = \eta_{\Omega+H_2,2} = Q_2, m = 1,2,\cdots$,从而 $u_{\Omega+H_2+m} = V_1 \cdot \overbrace{00\cdots0}^{R}Q_1Q_2\eta_{\Omega+H_2+m,3}\eta_{\Omega+H_2+m,4}\cdots, m=0,1,2,\cdots$.

按照以上方法,还能找到 $H_k \geqslant H_{k-1}, k=2,3,\cdots$,使:

$$u_{\Omega+H_k+m} = V_1 \cdot \overbrace{00\cdots0}^{R}Q_1Q_2\cdots Q_k\eta_{\Omega+H_k+m,k+1}\cdots, k,m = 1,2,\cdots \tag{58}$$

而由式(3)知,ξ 是$\{u_i\}$的极限,故当式(58)成立时,ξ 的表达式应为:

$$\xi = V_1 \cdot \overbrace{00\cdots0}^{R}Q_1Q_2\cdots Q_k\cdots \tag{59}$$

因式(59)中的 R 为某个确定的非负整数,Q_1 为{1,2,…,9}中某个确定的数码,故无论式(59)中的 $Q_2, Q_3,\cdots,Q_k,\cdots$ 是{0,1,2,…,9}中的任何数,都可以确知,在 ξ 的表达式中,既有正整数部分 $V_1 \in \{1,2,\cdots,C-1\}$,又有小数部分. 这就与 ξ 是整数的假设相矛盾. 于是当 $u_1 \in (1,c)$ 时,定理的结论成立. 在前面的情形(i),又论证了当 $u_1 \in (0,1]$,定理的结论成立,于是定理得到了全部证明. Fermat 猜想也得到了证明.

参考文献:

[1] T. M. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程[M]. 北京:高等教育出版社,1956

[2] 李焕兵. 微分学中几个不等式的定价关系[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2005(2):155-159

[3] 郭辉,谭艳. 二重积分中值点渐近性的讨论[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(2):157-159

A Proof of Fermat Conjecture

LI Huan-bing

(Department of Veteran Cadre, Hebei University of Science and Technology, Shijiazhuang 050054, China)

Abstract: Previous conjecture was that, when $n \geqslant 3$, the equation $x^n + y^n = z^n, x > 0, y > 0, z > 0$, had no integer solution. This paper changes the conjecture as, let n, y and z are all positive integers, and $n \geqslant 3, y < z$, then in the equation $z^n + y^n - x^n = 0$, x is not integer and then this equation has been proved.

Key words: nonzero number; equivalent infinitesimal; jump-style monotonically increasing

责任编辑:李翠薇