文章编号:1672 - 058X(2012)03 - 0051 - 04

关于复合型数值求积公式的几点注记*

李焕荣[a],宋证远[b]
(重庆工商大学 a. 数学与统计学院;b. 体育学院,重庆 400067)

摘　要:复合型数值求积公式不仅是数值积分理论部分的主要内容,也是数值积分求解实际问题的重要方法. 针对两种常用的复合型求积公式,即复合梯形公式和复合 Simpson 公式,通过实际算例验证了两种方法的理论,并分析了它们的计算精度和效率,为学习和使用复合型求积公式的学生及工程人员更好地理解和运用公式提供了参考和铺垫.

关键词:复合梯形公式;复合 Simpson 公式;数值算例

中图分类号:O241.6　　**文献标志码:**A

在科学计算或者工程应用中,经常会遇到各种定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的计算,当被积函数 $f(x)$ 为初等函数时,则可利用 Newton-Leibniz 公式通过计算原函数求出其结果. 但是当 $f(x)$ 不是连续函数,甚至也不是解析函数,而是通过实验测量或者数值计算得出的一组数据时,Newton-Leibniz 公式将不能直接应用,此时只能借助数值积分方法求其近似解.

由定积分的定义得知,函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分值是和式的极限,即:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $h = \max\limits_{0\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$,积分和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ 是一些点上函数值的线性组合. 因此可考虑用被积函数在积分区间 $[a,b]$ 上的某些节点 x_i 处的函数值的线性组合作为定积分的近似值,即:

$$I(f) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

其中 A_i 称为求积系数,它只与节点 x_i 的选取有关,而不依赖与被积函数 $f(x)$ 的具体形式. 这就避开了 Newton-Leibniz 公式需要寻求原函数的困难,很适合在计算机上使用.

1　复合型求积公式

复合型求积公式是基于插值型求积理论的基础之上的,只是将积分区间 $[a,b]$ 划分成若干的子区间,然后在每个子区间上运用低阶的求积公式计算出子区间上积分的近似值,然后再将这些近似值相加得到积分区间 $[a,b]$ 上的近似积分值.

收稿日期:2011 - 09 - 15;**修回日期:**2011 - 11 - 15.
* **基金项目:**国家自然科学基金(11101453);重庆市科委(2010BB9252)和重庆市教委(KJ110712)项目.
作者简介:李焕荣(1979-),女,山东泰安人,副教授,博士,从事偏微分方程数值解的研究.

1.1 复合梯形公式

将区间$[a,b]$划分为n等份,步长为$h=\frac{b-a}{n}$,节点分别为$x_k=a+kh,k=0,1,\cdots,n$,从而得到复合梯形公式:

$$T_n=\sum_{k=0}^{n-1}\int_{x_k}^{x_{k+1}}f(x)dx=\frac{h}{2}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+f(x_{k+1})]=\frac{h}{2}\Big[f(a)+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\Big]=$$
$$\frac{h}{2}(f(a)+2f(x_1)+2f(x_1)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(b))=$$
$$\frac{h}{2}(f_0+2f_1+2f_2+\cdots+2f_{n-1}+f_n) \tag{1}$$

复合梯形公式的余项为:$R_n[f]=-\frac{b-a}{12}h^2f''(\eta),\eta\in(a,b)$.

1.2 复合 Simpson 公式

将区间$[a,b]$划分为n等份,记$x_{k+\frac{1}{2}}=x_k+\frac{1}{2}h$,从而推导出复合 Simpson 公式:

$$S_n=\frac{h}{6}\sum_{k=0}^{n-1}[f(x_k)+4f(x_{k+\frac{1}{2}})+f(x_{k+1})]=$$
$$\frac{h}{6}\Big[f(a)+4\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+\frac{1}{2}})+2\sum_{k=1}^{n-1}f(x_k)+f(b)\Big]=$$
$$\frac{h}{3}[f_0+4f_1+2f_2+2f_3+\cdots+2f_{n-2}+4f_{n-1}+f_n] \tag{2}$$

复合 Simpson 公式的余项为:$R_n[f]=-\frac{b-a}{180}(\frac{h}{2})^4f^{(4)}(\eta),\eta\in(a,b)$.

2 算例比较

给出两个算例,分别根据复合梯形公式(1)和复合 Simpson 公式(2)用 Matlab 编程,求出积分的近似值,并对其作比较.

例1 求$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$的数值积分.

表1 区间划分不同时所得近似值

n(区间等分数)	16	20	256
T(复合梯形公式)	0.341 266 0	0.341 294 3	0.341 344 4
S(复合 Simpson 公式)	0.341 344 8	0.341 344 8	0.341 344 7

通过表1可以看出,在被积函数的具体形式给定,求积区间相同的情况下,运用复合求积公式运算的过程中,积分区间划分得越精细,所取的子区间个数越多,运算得到的结果越精确. 同时还可以看到,对于相同节点数的情形,利用复合 Simpson 公式计算所得到结果更加趋近于精确值. 而且在利用复合 Simpson 公式编程计算时发现,在区间等分数n为32时,所得到的结果已经为0.341 344 7,而当区间等分数$n>32$时,计算得到的近似值均为0.341 344 7,并不随节点数的增加而改变,这说明复合 Simpson 公式计算定积分所选取的节点数远远小于复合梯形公式,且具有相似的计算精确度.

例2 在高等数学的定积分运算中,当被积函数为$\sqrt{a^2-x^2}$,积分区间为$[0,a]$时,可以利用公式

$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}a^2$ 来计算此类定积分的准确值. 分别用复合梯形公式(1) 和复合 Simpson 公式(2) 计算定积分$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x$,并与该积分的精确值$\frac{\pi}{4} = 0.785\,398\,2\cdots$ 进行比较.

表 2　两种复合求积公式的近似值以及与精确值的误差

n	T	S	Error(T)	Error(S)
2	0.683 012 7	0.744 016 9	0.102 385 5	0.041 381 3
4	0.748 927 3	0.770 898 8	0.036 470 9	0.014 499 4
8	0.772 454 8	0.780 297 3	0.012 943 4	0.005 100 9
16	0.780 813 3	0.783 599 4	0.004 584 9	0.001 798 8
32	0.783 775 6	0.784 763 1	0.001 622 6	0.000 635 1
64	0.784 824 2	0.785 173 8	0.000 574 0	0.000 224 4
128	0.785 195 2	0.785 318 9	0.000 203 0	0.000 079 3
256	0.785 326 4	0.785 370 1	0.000 071 8	0.000 028 1
512	0.785 372 8	0.785 388 3	0.000 025 4	0.000 009 9

在表 2 中,给出了几个不同区间划分数时两种复合型求积公式的近似值以及他们与精确值的误差,其中 T 和 S 分别表示运用复合梯形公式和复合 Simpson 公式所求的积分近似值,而 Error(T) 和 Error(S) 分别表示复合梯形公式和复合 Simpson 公式所求近似值与精确解的误差. 图 1 和图 2 分别给出了两种复合求积公式随着节点的增加,近似值逐渐增大并接近精确解的过程,并且误差也随着节点的增加逐渐变小并趋于零. 对比表 2 以及图 1 和图 2 可以看出,当两种复合求积公式计算定积分所取的节点数相同时,利用复合 Simpson 公式计算所得近似值更接近于准确值,即误差相对于复合梯形公式都要小. 这也说明,要想达到同样的计算精确度,利用复合梯形公式计算时,计算量大且效率不高,而利用复合 Simpson 公式计算时,计算量较小且效率较高.

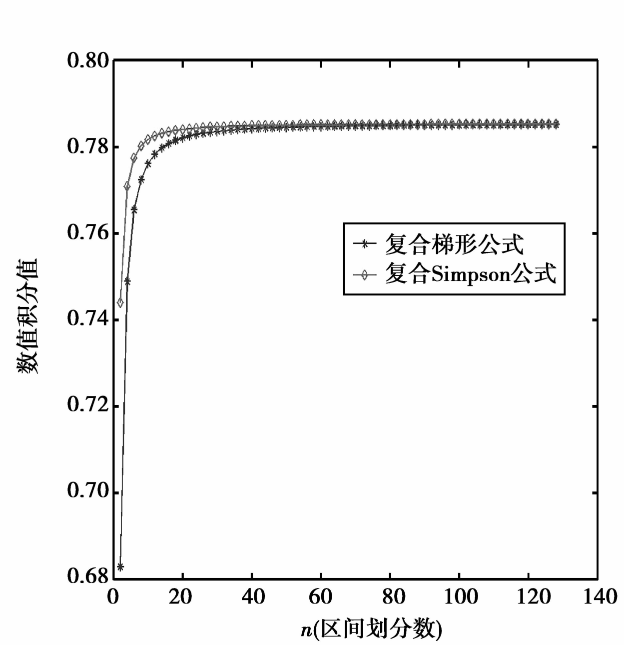

图 1　两种复合求积公式所得积分近似值

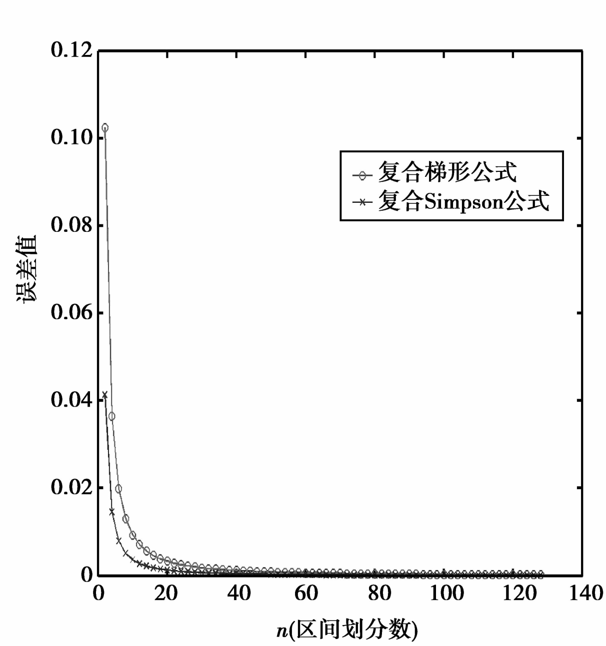

图 2　两种复合求积公式的误差

3 小 结

简单介绍了数值积分的提出和两种常用的复合型求积公式,重点通过两个算例编程计算所得的数值积分的值以及与精确解的误差,比较了复合梯形公式和复合 Simpson 公式. 从计算定积分的实际算例结果分析可以看到,复合 Simpson 公式所选取的节点数远远小于复合梯形公式,且具有相似的计算精确度;而且要想达到相同的计算精确度,与复合梯形公式相比,复合 Simpson 公式的计算量要小得多,即效率更高. 因此在实际的工程运用中,复合 Simpson 公式更便于计算,实用性更强.

参考文献:

[1] 杜廷松,沈艳军,覃太贵. 数值分析及其实验[M]. 北京:科学出版社,2006
[2] 李庆杨,王能超,易大义. 数值分析[M]. 5 版. 北京:清华大学出版社,2008
[3] 姜启源,邢文训,谢金星,等. 大学数学实验[M]. 北京:清华大学出版社,2005
[4] 朱衡君,肖燕彩,邱成. Matlab 语言及实践教程[M]. 北京:清华大学出版社,2005
[5] 李焕荣. 信息与计算科学专业开放性实践教学改革初探[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(3):310-312

Several Notes on Composite Numerical Integral Formula

LI Huan-rong[a], SONG Zheng-yuan[b]

(a. School of Mathematics and Statistics; b. School of Physical Education,
Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: Composite numerical integral formula is not only the main content of numerical integral theory but also an important method for practical numerical integral solution. According to two general composite integral formulas, i. e. composite trapezoidal formula and composite Simpson formula, This paper uses practical calculation examples to verify the theory for these two methods, analyzes their calculation accuracy and efficiency and provides reference and basis for students and engineers to learn and use composite integral formulas.

Key words: composite trapezoidal formula; composite Simpson formula; numerical calculation example

责任编辑:李翠薇