文章编号:1672－058X(2012)03－0033－05

基于降价销售的 EOQ 模型下易变质商品库存分析*

陈　玲, 朱　静**
(安徽农业大学 经济管理学院,安徽 合肥 230036)

摘　要:建立了需求为常数的易变质商品降价促销的 EOQ 模型,对模型最优解的存在性进行了说明,并介绍了求最优解的方法,为易变质商品的促销提供理论依据。

关键词:EOQ 模型;库存;变质;促销
中图分类号:O29　　　　**文献标志码**:A

在现实生活中,易变质商品是一种特殊的商品,由于损坏、腐烂、挥发、贬值或受到其他影响使其品质和需求大打折扣。近年来有关易变质商品的库存问题研究已成为一个活跃的研究领域,如果该类产品价值较高或数量较大,则人们会采取措施减少损失的发生,且库存时间越长,这种措施越需要加强。变质性物品库存管理要求企业、零售商以市场为背景进行分析,制定出最优生产策略(何时生产、生产多少)及最优的订货策略(何时订购、订购多少)以获得最大的利益或消耗最少的成本。

1　易变质商品的相关库存理论

传统的库存理论把库存的减少归结于对商品的需求[1],而往往忽视商品的变质。事实上,现实生活中存在着大量的易变质商品,例如:水果、蔬菜、牛奶、肉食、鲜花等,它们的变质率[2]往往是非常高的,这对于做出正确的生产和库存策略有不可忽视的影响。

对易变质商品的研究始于 Ghare 和 Schrader[3],他们用负指数函数来表示库存水平、变质率和需求率之间的关系,具体形式如下:

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}+aI(t)=-f(t)$$

其中 a 是商品的变质率,$I(t)$ 为 t 时刻的库存水平,$f(t)$ 表示商品的需求率。这种方法通过函数来量化变质率与库存水平、需求率之间的关系有便于研究,但是用负指数函数来描述变质率太过简单,存在很大的局限性。到 1973 年 Covert 和 Philpi[4]用含两个参数的 weibun 函数来描述物品的变质率,利用 weibun 函数可以将变质率写成如下形式:

收稿日期:2011－08－10;修回日期:2011－09－25.
* 基金项目:安徽省科技厅重点研究项目(07030503017);安徽农业大学社会科学基金重点项目(200903).
作者简介:陈玲(1987-),女,安徽安庆人,硕士研究生,从事企业库存管理研究.
** 通讯作者:朱静(1964-),女,安徽滁州人,副教授,硕士生导师,从事企业经营管理、人力资源管理研究,E-mail:ahzj0121@ahau. edu. cn.

$$\theta(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}$$

其中 α 是变质率函数的变质尺度因子,并且 α > 0,β 是形状因子,0 < β < 2,t 为时间。相比负指数函数而言,用 weibun 函数来描述变质率更精确,但是这种方法也存在一定的局限性,即只有当物品的初始变质率很大或是接近于0时,这种函数才会有效。

2 模型的建立

在易变质商品的销售过程中,零售商为了减少变质商品的数量,在实际销售过程中可能采取降价促销行为,从零售商角度出发,建立了降价促销情况的易变质商品的 EOQ 模型。

2.1 模型的假设和符号说明

缺货费用无穷大,即零售商所销售的商品不允许缺货[4];当存储降至零时,可以立即得到补充,既备货时间或拖后时间很短,可以近似的看作零;每次订货量不变,订货费用不变,设为 C_3;设货物单位成本为 K;设单位物品单位时间的存储费用不变,设为 C;设货物变质率服从两个参数的 weibun 函数。为了研究的方便,设 $\beta=1$,即单位物品单位时间的变质率为 a;设需求是均匀连续的,刚开始以价格 P_1 销售,对应的需求速度为 R_1,过段时间后以 P_2 销售,对应的需求速度为 R_2,显然有 $P_1>P_2$,$R_1<R_2$。

2.2 模型的建立

设 $I(t)$ 为 t 时刻的存储量,显然 $I(t)$ 为 t 的连续函数,由于单位物品单位时间的变质率为 a,所以 $0\leqslant t_1\leqslant t_2$,$0<t_2\leqslant\dfrac{1}{a}$。

当 $0\leqslant t<t_1$ 时,有:

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + aI(t) = -R_1 \tag{1}$$

当 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 时,有:

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} + aI(t) = -R_2 \tag{2}$$

所以,当 $0\leqslant t<t_1$ 时,由式(1)可得:

$$I(t) = C_1e^{-at} - \frac{R_1}{a} \tag{3}$$

当 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 时,由式(2)可得:

$$I(t) = C_2e^{-at} - \frac{R_2}{a} \tag{4}$$

注意到 t_2 时刻开始订货,即 $I(t_2)=0$,代入式(4)可得:

$$C_2 = \frac{R_2}{a}e^{at_2} \tag{5}$$

又因为 $I(t)$ 为 t 的连续函数,有 $I(t_1)=C_1e^{-at_1}-\dfrac{R_1}{a}=C_2e^{-at_1}-\dfrac{R_2}{a}$,得出:

$$C_1 = \frac{R_2}{a}e^{at_2} + \frac{R_1-R_2}{a}e^{at_1} \tag{6}$$

由式(3)-式(6)可得:

$$I(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{R_2}{a}e^{at_2}+\dfrac{R_1-R_2}{a}e^{at_1}\right)\mathrm{e}^{-at}-\dfrac{R_1}{a},0\leqslant t<t_1\\ \dfrac{R_2}{a}[\mathrm{e}^{a(t_2-t)}-1],t_1\leqslant t\leqslant t_2\end{cases}\tag{7}$$

当 $t=0$ 时,由式(7)可得零售商的订货量为:$Q=I(0)=\dfrac{R_2}{a}(e^{at_2}-e^{at_1})+\dfrac{R_1}{a}(e^{at_1}-1)$,而单位时间的平均利润为:

$$\text{平均利润}=\frac{\text{销售额}-\text{货物的成本}-\text{存储费}-\text{订购费}}{\text{订货间隔时间}}\tag{8}$$

其中:销售额 $=P_1R_1t_1+P_2R_2(t_2-t_1)$,

货物的成本 = 货物单位成本 × 定货量 $=K\left[\dfrac{R_2}{a}(e^{at_2}-e^{at_1})+\dfrac{R_1}{a}(e^{at_1}-1)\right]$,

存储费 $=\int_0^{t_2}CI(t)\mathrm{d}t=\int_0^{t_1}CI(t)\mathrm{d}t+\int_{t_1}^{t_2}CI(t)\mathrm{d}t=$

$$C\left\{\left[\left(\frac{R_2}{a^2}e^{at_2}+\frac{R_1-R_2}{a^2}e^{at_1}\right)(1-e^{-at_1})-\frac{R_1}{a}t_1\right]+\left[\frac{R_2}{a^2}(e^{a(t_2-t_1)}-1)-\frac{R_2}{a}(t_2-t_1)\right]\right\},$$

订购费 $=C_3$,定货间隔时间 $=t_2$,设单位时间的平均利润为 $w(t_1,t_2)$,根据式(8)则有:

$$w(t_1,t_2)=$$

$$\frac{\begin{gathered}P_1R_1t_1+P_2R_2(t_2-t_1)-K\left[\frac{R_2}{a}(e^{at_2}-e^{at_1})+\frac{R_1}{a}(e^{at_1}-1)\right]-\\ C_3-C\left\{\left[\left(\frac{R_2}{a^2}e^{at_2}+\frac{R_1-R_2}{a^2}e^{at_1}\right)(1-e^{-at_1})-\frac{R_1}{a}t_1\right]+\left[\frac{R_2}{a^2}(e^{a(t_2-t_1)}-1)-\frac{R_2}{a}(t_2-t_1)\right]\right\}\end{gathered}}{t_2}=$$

$$\frac{\begin{gathered}\left(P_1R_1-P_2R_2+\frac{CR_1}{a}-\frac{CR_2}{a}\right)t_1+\left(\frac{KR_2}{a}-\frac{KR_1}{a}-\frac{CR_1}{a^2}+\frac{CR_2}{a^2}\right)e^{at_1}+\\ \left(P_2R_2+\frac{CR_2}{a}\right)t_2-\left(\frac{KR_2}{a}+\frac{CR_2}{a^2}\right)e^{at_2}+\left(\frac{KR_1}{a}+\frac{CR_1}{a^2}-C_3\right)\end{gathered}}{t_2}$$

2.3　模型的求解

很明显,目标函数 $w(t_1,t_2)$ 在区域 $D=\left\{(t_1,t_2)\mid 0\leqslant t_1\leqslant t_2,0<t_2\leqslant\dfrac{1}{a}\right\}$ 上是连续函数,且:

$$\lim_{t_1,t_2\to0}w(t_1,t_2)=$$

$$\lim_{t_1,t_2\to0}\frac{\begin{gathered}\left[\left(P_1R_1-P_2R_2+\frac{CR_1}{a}-\frac{CR_2}{a}\right)t_1+\left(\frac{KR_2}{a}-\frac{KR_1}{a}-\frac{CR_1}{a^2}+\frac{CR_2}{a^2}\right)e^{at_1}+\right.\\ \left.\left(P_2R_2+\frac{CR_2}{a}\right)t_2-\left(\frac{KR_2}{a}+\frac{CR_2}{a^2}\right)e^{at_2}+\left(\frac{KR_1}{a}+\frac{CR_1}{a^2}-C_3\right)\right]\end{gathered}}{t_2}=$$

$$\lim_{t_2\to0}\frac{-C_3+\dfrac{2C(R_1-R_2)}{a^2}}{t_2}=-\infty$$

所以 $w(t_1,t_2)$ 在 $D=\left\{(t_1,t_2)\mid 0\leqslant t_1\leqslant t_2,0<t_2\leqslant\dfrac{1}{a}\right\}$ 有最大值,$w(t_1,t_2)$ 在 $D=\left\{(t_1,t_2)\mid 0\leqslant t_1\leqslant t_2,0<t_2\leqslant\dfrac{1}{a}\right\}$ 求最大值可视为一个有约束条件的非线性规划求极值问题,其中目标函数为:

$$\max w(t_1,t_2) = \max \frac{\left[\left(P_1R_1 - P_2R_2 + \frac{CR_1}{a} - \frac{CR_2}{a}\right)t_1 + \left(\frac{KR_2}{a} - \frac{KR_1}{a} - \frac{CR_1}{a^2} + \frac{CR_2}{a^2}\right)e^{at_1} + \left(P_2R_2 + \frac{CR_2}{a}\right)t_2 - \left(\frac{KR_2}{a} + \frac{CR_2}{a^2}\right)e^{at_2} + \left(\frac{KR_1}{a} + \frac{CR_1}{a^2} - C_3\right)\right]}{t_2},$$

约束条件为$\begin{cases} t_2 - t_1 \geqslant 0 \\ t_1 \geqslant 0 \\ t_2 > 0 \\ -t_2 + \frac{1}{a} \geqslant 0 \end{cases}$，相应的解法有可行方向法[6]和制约函数法[7]。

3 算例分析

这里考虑某零售商的情况，相关的参数设置为：变质率 $a=0.1$，单位成本 $K=10$ 元，订购费 $C_3=200$ 元，单位物品单位时间的存储费 $C_1=1$ 元/件·d，$P_1=20$ 元，对应的需求速度为 $R_1=10$ 件/d，$P_2=15$ 元，对应的需求速度为 $R_2=20$ 件/d。

由上所知，$w(t_1,t_2) = \frac{-200t_1 + 2\ 000e^{0.1t_1} + 500t_2 - 4\ 000e^{0.1t_2} + 1\ 800}{t_2}$，约束条件为$\begin{cases} t_2 - t_1 \geqslant 0 \\ t_1 \geqslant 0 \\ t_2 > 0 \\ -t_2 + 10 \geqslant 0 \end{cases}$。

3.1 当最优解处于定义域边界时

（1）当在边界 $t_1=t_2$ 时，即不允许降价，模型为 $w(t_2) = 200 - \frac{2\ 000e^{0.1t_2} - 100t_2 - 1\ 800}{t_2}$，$t_2 \in (0,10]$。令 $S(T) = \frac{2\ 000e^{0.1T} - 100T - 1\ 800}{T}$，$T \in (0,10]$。用插值法来近似的计算最优解。最优解可为：$T^* = 4 - \frac{0.613}{0.613+3.656} = 3.928$，$S(T^*) = \frac{2\ 000e^{0.392\ 8} - 392.8 - 1\ 800}{3.928} = 195.90$。故 $w(t_{2^*}) = 200 - 195.90 = 4.1$。

（2）当在边界 $t_2=10$ 时，有 $w(t_1,10) = \frac{-200t_1 + 2\ 000e^{0.1t_1} + 5\ 000 - 4\ 000e + 1\ 800}{10}$，$\frac{\mathrm{d}w(t_1,10)}{\mathrm{d}t_1} = -20 + 20e^{0.1t_1} > 0$，函数 $\frac{\mathrm{d}w(t_1,10)}{\mathrm{d}t_1}$ 在定义域内随着 t_1 单调增加，故最优的解为 $t_{1^*} = 10$，$w(10,10) = \frac{-2\ 000 + 2\ 000e + 5\ 000 - 4\ 000e + 1\ 800}{10} = -63.6$。

（3）当在边界 $t_1=0$ 时，同上，通过插值法可以近似地算出最优解为：$t_2^* = 2 + \frac{27.122}{27.122+2.266}(3-2) = 2.923$，$w(0,2.923) = \frac{500\times 2.923 - 4\ 000e^{0.1\times 2.923} + 3\ 800}{2.923} = -33.02$。

3.2 当最优解处于定义域内部时

对 $w(t_1,t_2)$ 求偏导数有 $\frac{\partial w(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \frac{-200+200e^{0.1t_1}}{t_2} > 0$，函数 $\frac{\partial w(t_1,10)}{\partial t_1}$ 在定义域内随着 t_1 单调增加，故有当 $t_1 \to t_2$ 时目标函数达到最大值。因此，在上述参数条件下，最优解为：$t_{1^*} = t_2^* = 3.928$，$w(t_1^*, t_{2^*}) = 4.1$。

当 $t_2 = t_1$ 时,即零售商在销售的过程中可以不降价,模型的定义域退化为:$D_1 = \{(t_1, t_2) | 0 \leqslant t_1 = t_2, 0 < t_2 \leqslant 10\}$,显然 $D_1 \subseteq D$,所以采用上述模型计算所得的平均利润一定大于或者等于不降价促销情况下的平均利润,这样零售商可以根据该模型来获得最大利润。这里正好是两者相等的情况,是降价销售情况下 EOQ 模型的解的一种特例。

综上可得:在上述参数条件下,最优解为 $t_1^* = t_2^* = 3.928$,$w(t_1^*, t_2^*) = 4.1$,即零售商可以选择不降价销售就可以获得最大利润,且最大利润为 4.1。不同的参数条件会得出不同的结果,零售商可以根据自己的实际情况,通过该模型来确定降价的时间(t_1)和再订购时间(t_2)来获得最大利润。

4　小　结

易变质物品广泛存在于现实库存系统中,变质物品库存控制问题一直是理论界和实业界的研究热点之一。给出了零售商在降价销售情况下的 EOQ 模型,并说明了模型求解的方法和相应的具体算例,进一步对模型及其求解方法予以说明。虽然模型的假设较之实际情况有一定的差别,但在单位时间利润最大化的基础上,通过求出模型的最优解,零售商可以确定开始降价促销的时间和再订购时间来获得最大利润,因此,对企业或零售商管理库存的实践具有一定的借鉴作用。

参考文献:

[1] 文晓巍,左两军. 易变质商品库存理论研究综述[J]. 华南农业大学学报:社会科学版,2007(4):47-52

[2] 刘昊. 供应链环境下易变质商品的库存模型研究[J]. 物流过程与管理,2010,32(9):83-85

[3] L IAO H C, TSA I C H, SU C T. An inventory model with deteriorating items under inflation when a delay in payment is permissible [J]. Int. J. Production Economics,2000,63(2):207-214

[4] KHANRA S, CHAUDHUR I K S. A note on an order-level inventory model for a deteriorating item with time-dependent quadratic demand [J]. Computer &Operations research,2003,30(5):1901-1916

[5] 张旭万,钟波. 库存影响需求率的供应链 EOQ 模型[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2007,24(4):331-336

[6]《运筹学》教材编写组. 运筹学[M]. 3 版. 北京:清华大学出版社,2005

[7] 袁亚湘. 非线性规划数值方法[M]. 上海:上海科学技术出版社,1993

Analysis of Deteriorating Items Inventory under Economic Order Quantity Model Based on Price Reduction Sale

CHEN Ling, ZHU Jing

(College of Economics and Management, Anhui Agricultural University, Anhui Hefei 230036, China)

Abstract: This article has established Economic Order Quantity (EOQ) Model for price reduction sale of deteriorating items by taking demand as a constant, explains the existence of the optimal solution to the model, introduces the method for the optimal solution and provides theoretical basis for the promotion of deteriorating commodities.

Key words: EOQ Model; inventory; deterioration; promotion

责任编辑:田　静