文章编号:1672 - 058X(2012)03 - 0007 - 05

线性等式约束的奇异线性模型的 Liu 型估计*

廖 勋

(重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331)

摘 要:考虑带等式约束的奇异线性模型的参数估计,为了克服复共线性问题,提出一个新的 Liu 型估计;同时给出这个估计的一些性质,并且得到了这个新的 Liu 型估计在均方误差矩阵准则 (MSEM) 下优于约束最小二乘估计的充要条件; 得到在均方误差 (MSE) 准则下新估计优于约束最小二乘估计的充分条件.

关键词: Liu 型估计;约束最小二乘估计;均方误差;均方误差矩阵

中图分类号:O212.4 **文献标志码:**A

最小二乘估计在线性模型中处于中心地位,并且在很长一段时间里因其形式简便和应用广泛一直被当作最佳估计. 然而,当模型中存在复共线性时,最小二乘估计因估计精度降低而不再是一个好的估计. 因此,有偏估计被广泛应用,比如 Liu 估计[1].

除了有偏估计外,一个克服复共线性问题的有效方法就是在考虑样本信息时再加上一些先验信息,比如等式或随机约束.

考虑随机约束,Schaffrin 和 Toutenburg[2] 提出了加权混合估计. 对线性等式约束,最著名的就是约束最小二乘估计. Groß[3] 介绍了约束岭估计,并给出了这个估计优于最小二乘估计的充要条件;Hubert 和 Wijekoon[4] 提出了随机约束 Liu 估计; Özkale[5] 提出一个新的随机约束岭估计;农秀丽[6] 等给出了条件岭型估,并给出这个估计的有效性质.

考虑奇异线性模型,根据 C. R. Rao[7] 得出的最小二乘统一理论,得到广义最小二乘估计. 若研究带有线性等式约束的奇异线性模型,Xu 和 Yang[8] 提出了可改变的随机约束 Liu 估计,并证明了在某些特殊条件下,这个估计是无偏的. Zhang 和 Yang[9] 提出条件岭型估计.

1 Liu 型估计

考虑如下的线性回归模型:

$$\begin{cases} y = X\beta + e \\ E(e) = 0, \mathrm{Cov}(e) = \sigma^2 \sum \\ H\beta = r \end{cases} \tag{1}$$

其中 y 是一个 $n\times 1$ 的观察向量,X 是一个列满秩的 $n\times p$ 的设计矩阵,β 是 $p\times 1$ 的未知参数向量,e 是 $n\times 1$

收稿日期:2011 - 08 - 10;**修回日期:**2011 - 09 - 20.

* **基金项目:**中央高校基本科研业务费资助(CDJXS11100047).

作者简介:廖勋(1986-),男,四川邻水人,硕士研究生,从事多元分析研究.

的随机误差向量,$\sigma^2\sum$ 是 e 的协方差矩阵,并且 $\sum$ 是非负定的,H 是一个行满秩的 $m\times p$ 矩阵,r 为 $p\times 1$ 向量. 如果 $\sum$ 是奇异的,就称这个模型为奇异线性模型.

考虑模型(1),根据 C. R. Rao[7] 提出最小二乘统一理论,令 $T=\sum+XUX'$,其中 $U\geqslant 0$,且 $\mathrm{rank}(T)=\mathrm{rank}(\sum:X)$,得到约束最小二乘估计:

$$\beta_R^*=\beta^*-(X'T^-X)^{-1}H'[H(X'T^{-1}X)H']^{-1}(H\beta^*-r) \tag{2}$$

设 $S=X'T^-X$,$W=S^{-1}-S^{-1}H'(HS^{-1}H')HS^{-1}$,则 β_R^* 变形为:

$$\beta_R^*=WX'T^-y+a \tag{3}$$

其中 $a=S^{-1}H'(HS^{-1}H')r$.

若模型的设计矩阵中有复共线性,类似式(3)的形式,得到新的 Liu 型估计:

$$\beta_L^*=(I+W)^{-1}(I+dW)WX'T^-y+a \tag{4}$$

其中 $0<d<1$ 是一个常数(d 为 Liu 参数). 选择不同的 d 值,可以得到不同的估计,特别的,当 $d=1$ 时,新估计为约束最小二乘估计 β_R^*.

2 引 理

引理 1 假设 M 是一个非负定的矩阵,$M-\alpha\alpha'\geqslant 0$,当且仅当 $\alpha\in R(M)$ 且 $\alpha'M^-\alpha\leqslant 1$,其中 $R(M)$ 表示 M 列生成的空间,M^- 是 M 的任意广义逆满足 $MM^-M=M$.

证明 见 Trenkler and Toutenburg[10].

引理 2 设 $W=(X'T^-X)^{-1}-(X'T^-X)^{-1}H'[H(X'T^-X)^{-1}H']H(X'T^-X)^{-1}$,则 $W\geqslant 0$ 且 $\mathrm{rank}(W)=p-m$. 对 W 作谱分解,则 $Q'WQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)=\Lambda$,其中 Q 是一个正交矩阵. $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$ 是 W 的顺序特征值,并且 $\lambda_{p-m+1}=\lambda_{p-m+2}=\cdots=\lambda_p=0$.

证明 见 Zhang and Yang [9].

3 β_L^* 的一些性质

为了简化计算,把带有线性等式约束的的奇异线性模型写成典则形式:

$$\begin{cases} y=Z\alpha+e \\ E(e)=0,\mathrm{Cov}(e)=\sigma^2\sum \\ L\alpha=r \end{cases}$$

其中 $Z=XQ$,$L=HQ$,$\alpha=Q'\beta$,显然

$$\alpha_R^*=\Lambda Z'T^{-1}y,\alpha_L^*=(I+\Lambda)^{-1}(I+d\Lambda)\Lambda Z'T^{-1}y+b$$

其中 $b=(Z'T^-Z)^{-1}L'[L((Z'T^-Z)^{-1})L']r$. 下面给出 Liu 型估计的性质:

性质 1 β_L^* 是有偏估计.

证明 $E(\beta_L^*)=E[(I+W)^{-1}(I+dW)WX'T^-y+a]=(I+W)^{-1}(I+dW)WS\beta+a=(I+W)^{-1}(I+dW)(\beta-a)+a$,若 $E(\beta_L^*)=\beta$,则 $(I+W)^{-1}(I+dW)(\beta-a)+a=\beta\Leftrightarrow(I+dW)(\beta-a)-(I+W)a-\beta=0\Leftrightarrow d=1$ or $\beta=a$.

因为 $0<d<1$,且 $\beta\neq a$,因此 β_L^* 是有偏估计.

性质 2　β_L^* 为压缩估计.

证明　$\|\beta_L^*\|^2=\|(I+W)^{-1}(I+dW)WX'T^-y+a\|^2=\|(I+W)^{-1}[(I+dW)WX'T^-y+(I+W)a]\|^2=\|(I+W)^{-1}[\beta_R^*+W(dWX'T^-y+a)]\|^2\leqslant\|(I+W)^{-1}[\beta_R^*+W\beta_R^*]\|^2=\|\beta_R^*\|^2$,性质得证.

性质 3　β_L^* 满足等式约束 $H\beta_L^*=r$.

证明　易得 $(I+W)^{-1}(I+dW)W=W(I+W)^{-1}(I+dW)$ 且 $HW=0$,则 $H\beta_L^*=H(I+W)^{-1}(I+dW)WX'T^-y+Ha=HW(I+W)^{-1}(I+dW)XT^-y+Ha=Ha=r$.

性质 4　β_L^* 的协方差阵一致小于 β_R^*.

证明　$\mathrm{Cov}(\beta_R^*)=\mathrm{Cov}(WX'T^-y)=\sigma^2WX'T^-\sum T^-XW$;$\mathrm{Cov}(\beta_L^*)=\mathrm{Cov}[(I+W)^{-1}(I+dW)WX'T^-y]=\sigma^2(I+W)^{-1}(I+dW)WX'T^-\sum T^-XW(I+dW)(I+W)^{-1}$. 令 $N=X'T^-\sum T^-X$,得到 $\mathrm{Cov}(\beta_R^*)-\mathrm{Cov}(\beta_L^*)=\sigma^2WX'T^-\sum T^-XW-\sigma^2(I+W)^{-1}(I+dW)WX'T^-\sum T^-XW(I+dW)(I+W)^{-1}=\sigma^2(I+W)^{-1}[(I+W)WNW(I+W)-(I+dW)WNW(I+dW)](I+W)^{-1}=\sigma^2(1-d)(I+W)^{-1}[W^2NW+WNW^2+(1+d)W^2NW^2](I+W)^{-1}$.

显然,$W^2NW+WNW^2+(1+d)W^2NW^2\geqslant0$,因此,$\mathrm{Cov}(\beta_R^*)-\mathrm{Cov}(\beta_L^*)\geqslant0$.

性质 5　$\mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\beta_L^*)]$ 是 d 的单调递增函数.

证明　令 $\Gamma.\ \mathrm{diag}(\mu_i,\mu_i,\cdots,\mu_p)=Z'T^-\sum T^-Z=Q'X'T^-\sum T^-XQ$,其中 $\mu_i\geqslant\mu_i\geqslant\cdots\geqslant\mu_p$ 表示 $X'T^-\sum T^-X$ 的顺序特征值.

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\beta_L^*)]=\mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\alpha_L^*)]=&\\ &\mathrm{tr}[(I+\Lambda)^{-1}(I+d\Lambda)\Lambda Z'T^-\textstyle\sum TZ\Lambda(I+\Lambda)^{-1}(I+d\Lambda)]=\\ &\sum_{i=1}^{p-m}\frac{(1+d\lambda_i)^2\lambda_i^2\mu_i}{(1+\lambda_i)^2}\end{aligned}$$

显然随着 d 的增大,$\mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\beta_L^*)]$ 的值也增大,因此 $\mathrm{tr}[\mathrm{Cov}(\beta_L^*)]$ 是 d 的单调递增函数.

4　β_L^* 与 β_R^* 的比较

4.1　均方误差矩阵(MSEM)准则比较

β 的参数估计 β^* 的均方误差矩阵(MSEM)定义如下:

$$\mathrm{MSEM}(\beta^*)=E(\beta^*-\beta)(\beta^*-\beta)'=\mathrm{Cov}(\beta^*)+\mathrm{Bias}(\beta^*)\mathrm{Bias}(\beta^*)'$$

其中 $\mathrm{Cov}(\beta^*)$ 表示 β^* 的协方差矩阵,$\mathrm{Bias}(\beta^*)=E(\beta^*)-\beta$ 是偏差向量. 给定两个估计 β_1^* 和 β_2^*,估计 β_2^* 在均方误差矩阵准则下优于 β_1^* 当且仅当:$\Delta=\mathrm{MSEM}(\beta_1^*)-\mathrm{MSEM}(\beta_2^*)\geqslant0$.

定理 1　β_L^* 在 MSEM 准则下优于 β_R^* 当且仅当

$$(a-\beta)'W[W^2NW+WNW^2+(1+d)W^2NW^2]^-W(a-\beta)\leqslant\frac{\sigma^2}{1-d}$$

证明　β_R^*,β_L^* 的均方误差矩阵为:$\mathrm{MSEM}(\beta_R^*)=\sigma^2WX'T^-\sum T^-XW=\sigma^2WNW$;$\mathrm{MSEM}(\beta_L^*)=\sigma^2(I+W)^{-1}(I+dW)WNW(I+dW)(I+W)^{-1}+(1-d)^2(I+W)^{-1}W(a-\beta)(a-\beta)'W(I+W)^{-1}$.

为了比较 β_L^* 和 β_R^*,作计算:$\Delta=\mathrm{MSEM}(\beta_R^*)-\mathrm{MSEM}(\beta_L^*)=\sigma^2D-dd'$,$D=\mathrm{Cov}(\beta_R^*)-\mathrm{Cov}(\beta_L^*)=WNW-(I+W)^{-1}(I+dW)WNW(I+dW)(I+W)^{-1}=(1-d)W^2NW+(1-d)WNW^2+(1-d^2)W^2NW^2$,$d=\mathrm{Bias}(\beta_L^*)=E(\beta_L^*)-\beta=(I+W)^{-1}(I+dW)WS\beta+a-\beta=(1-d)(I+W)^{-1}W(a-\beta)$. 根据性质 4,$D$ 是一个非负定矩阵,显然 $d\in R(D)$,由引理 1 得出 β_L^* 在均方误差矩阵准则下一致优于 β_R^*,当且仅当:$d'D^-d\leqslant\sigma^2$. 即:

$$(a-\beta)'W[W^2NW+WNW^2+(1+d)W^2NW^2]^-W(a-\beta)\leqslant\frac{\sigma^2}{1-d}$$

定理 2 β_L^* 在 MSEM 准则下一致优于 β_R^* 的充分条件：

$$(a-\beta)'(WNW)^{-1}(a-\beta)'\leqslant\sigma^2$$

证明

$$\begin{aligned}\mathrm{MSEM}(\beta_R^*)-\mathrm{MSEM}(\beta_L^*)=&\sigma^2WNW-\sigma^2(I+W)^{-1}(I+dW)WNW(I+dW)(I+W)^{-1}-\\&(1-d)^2(I+W)^{-1}W(a-\beta)(a-\beta)'W(I+W)^{-1}=\\&\sigma^2(I+W)^{-1}[(I+W)WNW(I+W)-(I+dW)WNW(I+dW)-\\&(1-d)^2W(a-\beta)(a-\beta)'W](I+W)^{-1}=\\&\sigma^2(1-d)(I+W)^{-1}W\Big[WN+NW+(1+d)WNW-\\&\frac{1+d}{\sigma^2}(a-\beta)(a-\beta)'\Big]W(I+W)^{-1}\end{aligned}$$

可以得到一个充分条件：

$$WNW-\frac{1}{\sigma^2}(a-\beta)(a-\beta)'\geqslant 0 \tag{5}$$

由引理 2 可得式(5)成立，当且仅当：$(a-\beta)'(WNW)^{-1}(a-\beta)'\leqslant\sigma^2$.

4.2 均方误差(MSE)比较

定理 3 β_L^* 在 MSE 准则下优于 β_R^* 的充分条件为：

$$0<d<\min\left[\frac{(b_i-\alpha_i)^2-\sigma^2\lambda_i\mu}{(b_i-\alpha_i)^2+\sigma^2\lambda_i^2\mu_i d}\right]$$

证明 易得 β_L^* 的均方误差：

$$\mathrm{MSE}(\beta_L^*)=\mathrm{tr}[\mathrm{MSE}(\beta_L^*)]=\mathrm{tr}(\alpha_L^*)=\sum_{i=1}^{p-m}\frac{\sigma^2\lambda_i^2\mu_i(1+d\lambda_i)^2+(1-d)^2\lambda_i^2(b_i-\alpha_i)^2}{(1+\lambda_i)^2}$$

其中 $b=(Z'T^-Z)^{-1}L'[L((Z'T^-Z)^{-1})L']r=(b_1,b_2,\cdots,b_p)'$.

令 $m(d)=\sum_{i=1}^{p-m}\frac{\sigma^2\lambda_i^2\mu_i(1+d\lambda_i)^2+(1-d)^2\lambda_i^2(b_i-\alpha_i)^2}{(1+\lambda_i)^2}$，对 d 微分：

$$\frac{\partial m(d)}{\partial d}=2\sum_{i=1}^{p-m}\frac{\lambda_i^2[\sigma^2\lambda_i^2\mu_i d+(b_i-\alpha_i)^2d-(b_i-\alpha_i)^2+\sigma^2\lambda_i\mu_i]}{(1+\lambda_i)^2}$$

显然 $m(d)$ 最小时，d 的取值为：

$$d=\frac{\sum_{i=1}^{p-m}\frac{\lambda_i^2(b_i-\alpha_i)^2-\sigma^2\lambda_i^3\mu_i}{(1+\lambda_i)^2}}{\sum_{i=1}^{p-m}\frac{\lambda_i^2(b_i-\alpha_i)^2+\sigma^2\lambda_i^4\mu_i}{(1+\lambda_i)^2}}$$

当 $d=1$ 时，β_L^* 即为 β_R^*. 因此，若 $0<d<\min\left[\frac{(b_i-\alpha_i)^2-\sigma^2\lambda_i\mu}{(b_i-\alpha_i)^2+\sigma^2\lambda_i^2\mu_i}\right]$，$\mathrm{MSE}(\beta_L^*)$ 是关于 d 的增函数，则存在一个小于 1 的值 d 使得 $\mathrm{MSE}(\beta_L^*)<\mathrm{MSE}(\beta_R^*)$. 因此新的 Liu 型估计存在比 β_R^* 更小的均方误差值.

5 结束语

基于等式线性约束的奇异线性模型,提出了一个新的 Liu 型估计. 列举了其一些有效性质,并在理论上说明其优越性. 在实际运用中,只要用一些方法(如时间序列的方法)确定残差分布的协方差阵,就可以轻易得出新估计.

参考文献:

[1] LIU K J. A new class of biased estimate in linear regression[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods,1993,22:315-323

[2] SCHAFFRIN B,TOUTENBURG H. Weighted mixed regression[J]. Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik,1990,70:735-738

[3] GROß J. Restricted ridge estimatio[J]. Statistics & Probability Letters,2003,65:57-64

[4] HUBERT M H,WIJEKOON P. Improvement of the Liu estimator in linear regression model[J]. Statistical Papers,2006,47:471-479

[5] ÖZKALE M R. A stochastic restricted ridge regression estimator[J]. Journal of Multivariate Analysis,2009,100:1706-1716

[6] 农秀丽,刘万荣,李明辉. 非齐次等式约束线性回归模型回归系数的条件岭型估计[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2007,30(6):18-24

[7] RAO C R. Linear Models-Least Square and Probability [M]. Springer-Verlag,1995

[8] XU J W,YANG H. Estimation in singular linear models with stochastic linear restrictions[J]. Communications in Statistics-Theory and Methods,2007,36:1945-1951

[9] ZHANG C M,YANG H. The conditional ridge-type estimation in singular linear model with linear equality restrictions[J]. Statistics,2007,41:485-494

[10] TRENKLER G,TOUTENBURG H. Mean squared error matrix comparisons between biased estimators-an overview of recent results[J]. Statistics Paper,1990,31:165-179

Liu-type Estimator on Singular Linear Model with Linear Equation Restriction*

LIAO Xun

(School of Mathematics and Statistics,Chongqing University,Chongqing 401331,China)

Abstract:This paper considers parameter estimator on singular linear model with equation restriction,presents a new Liu-type Estimator in order to overcome collinearity,gives some properties for this Estimator,obtains the sufficient and necessary condition for this new Liu-type Estimator superior to restricted least square estimator under mean square error matrix criterion and also receives sufficient condition for the new Estimator superior to restricted least square estimator in terms of mean square error criterion.

Key words:Liu-type Estimator;restricted least square estimator;mean square error;mean square error matrix

责任编辑:田 静
校 对:李翠薇