文章编号:1672 - 058X(2012)03 - 0001 - 06

一类分数阶微分方程共振边值问题解的存在性*

袁幼成,周宗福,周 辉

(安徽大学 数学科学学院,合肥 230039)

摘 要:利用重合度理论,研究了一类阶数为 $\alpha(n-1<\alpha<n)$ 的分数阶微分方程共振边值问题解的存在性,得到了其解存在的一个充分条件,并给出一个例子加以说明.

关键词:共振边值问题;分数阶积分;分数阶导数

中图分类号:O241.8 **文献标志码**:A

近几十年来,分数阶微积分与分数阶微分方程作为分析数学的一个重要分支获得了长足的发展,并且在流体力学、热力学、黏弹性理论、化学、电子化学、工程学、生命科学、扩散过程等领域得到了广泛的应用. 分数阶微分方程边值问题,尤其是共振边值问题,受到广泛关注,见文献[1] - [8]. 然而,已有的研究几乎都是低阶(1 - 2 阶)情形,对任意阶(α 阶,$n-1<\alpha<n$)情形,目前只有文献[9]研究过,但它研究的只是 $\dim\ker L=1$ 的情形,对于 $\dim\ker L\geqslant 2$ 的情形,目前没有研究文献. 此处将对 $\dim\ker L\geqslant 2$ 的情形讨论. 研究如下分数阶微分方程共振边值问题:

$$D_{0+}^{\alpha}x(t)=f(t,x(t),D_{0+}^{\alpha-1}x(t)),\text{a. e. } t\in[0,1] \tag{1}$$

$$x(0)=x'(0)=\cdots=x^{(n-3)}(0)=0$$

$$D_{0+}^{\alpha-1}x(0)=\sum_{i=1}^{k}a_iD_{0+}^{\alpha-1}x(\xi_i),D_{0+}^{\alpha-2}x(1)=\sum_{j=1}^{m}b_jD_{0+}^{\alpha-2}x(\eta_j) \tag{2}$$

其中 $n-1<\alpha<n,n\geqslant 3,k,m,n$ 为正整数. 假定:

(H_1) $0<\xi_1<\xi_2<\cdots<\xi_k<1,0<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_m<1,\sum_{i=1}^{k}a_i=1,\sum_{j=1}^{m}b_j=1,\sum_{j=1}^{m}b_j\eta_j=1.$

(H_2) $e_1=\sum_{i=1}^{k}a_i\xi_i,e_2=\frac{1}{2}\left(1-\sum_{j=1}^{m}b_j\eta_j^2\right),e_3=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}a_i\xi_i^2,e_4=\frac{1}{6}\left(1-\sum_{j=1}^{m}b_j\eta_j^3\right),e=\begin{vmatrix}e_1 & e_2\\ e_3 & e_4\end{vmatrix}\neq 0.$

(H_3) $f:[0,1]\times R\times R\to R$ 满足 Caratheodory 条件,即 $f(t,x,y)$ 当 $(x,y)\in R\times R$ 固定时,$f(t,x,y)$ 作为 t 的函数可测;对 a. e. $t\in[0,1]$,当 t 固定时,$f(t,x,y)$ 作为 (x,y) 的函数连续,并且对 $\forall r>0$, $\exists \Phi_r\in L^{\infty}[0,1]$,满足 $f(t,x,y)\leqslant\Phi_r(t)$, $\forall x,y\in[0,r]$,a. e. $t\in[0,1]$.

1 预备知识

令 X,Y 为实 Banach 空间,$L:\mathrm{dom}(L)\subset X\to Y$ 为指标为零的 Fredholm 映射,投影算子 $P:X\to X,Q:Y\to Y$,

收稿日期:2011 - 08 - 02;修回日期:2011 - 09 - 26.

* 基金项目:国家自然科学基金(11071001);安徽省教育厅重点项目(KJ2009A005Z);安徽大学学术创新团队项目(KJTD002B).

作者简介:袁幼成(1973-),男,湖北黄冈人,硕士研究生,从事微分方程研究.

满足 $\mathrm{lm}\ P=\mathrm{Ker}\ L$, $\mathrm{Ker}\ Q=\mathrm{lm}\ L$, $X=\mathrm{Ker}\ L\oplus\mathrm{Ker}\ P$, $Y=\mathrm{lm}\ L\oplus\mathrm{lm}\ Q$, 则 $L|_{\mathrm{dom}\ L\cap\mathrm{Ker}\ P}|$是可逆的,记其逆算子为 K_p. 设 Ω 为 X 的有界开子集,若映射 $N:X\to Y$ 满足 $QN(\overline{\Omega})$ 有界且 $K_p(I-Q)N:\overline{\Omega}\to X$ 是紧的,则称 N 在$\overline{\Omega}$上为$L-$紧的.

引理 1[10] 若 $L:\mathrm{dom}\ L\subset X\to Y$ 为指标为零的 Fredholm 映射, $N:X\to Y$ 在$\overline{\Omega}$上为 $L-$紧的,且(1) $\forall(x,\lambda)\in[\mathrm{dom}\ L\backslash\mathrm{Ker}\ L)\cap\partial\Omega]\times[0,1]$, $Lx\neq\lambda Nx$;(2) $\forall x\in\mathrm{Ker}\ L\cap\partial\Omega$, $Nx\notin\mathrm{lm}\ L$;(3) $\deg(QN|_{\mathrm{Ker}\ L},\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L,0)\neq 0$. 则 $Lx=Nx$ 在 $\mathrm{dom}\ L\cap\overline{\Omega}$中至少有一解.

定义 1[11] 设 $\alpha>0$, $y(t)\in L^1(0,T)$, $T>0$, 称 $I_{0+}^{\alpha}y(t)=\dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s$ 为 $y(t)$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 积分.

定义 2[11] 设 $\alpha>0$, $n=[\alpha]+1$, $y(t)\in L^1(0,T)$, $T>0$, 称 $D_{0+}^{\alpha}y(t)=\dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{d^n}{\mathrm{d}t^n}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{n-\alpha-1}y(s)\mathrm{d}s$ 为 $y(t)$ 的 α 阶 Riemann-Liouville 导数.

引理 2 设$f\in C[0,1]$, $q\geqslant p\geqslant 0$, 则 $D_{0+}^{p}I_{0+}^{q}f(t)=I_{0+}^{q-p}f(t)$.

引理 3 设 $\alpha>0$, $\beta>0$, 则:

(1) 当$\beta\neq\alpha-i$, $i=0,1,2,\cdots,[\alpha]$时, $D_{0+}^{\alpha}t^{\beta-1}=\dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)}t^{\beta-\alpha-1}$.

(2) $D_{0+}^{\alpha}t^{\alpha-i}=0$, $i=1,2,\cdots,[\alpha]+1$.

(3) $\forall u\in L^1[0,1]$, $D_{0+}^{\alpha}I_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)$.

(4) 设 N 是大于或等于 α 的最小整数,则:

(Ⅰ) 当且仅当 $u(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_Nt^{\alpha-N}(c_i\in R(i=1,2,\cdots,N))$ 时, $D_{0+}^{\alpha}u(t)=0$;(Ⅱ) $\forall u\in L^1(0,T)$, $t\in(0,T)$, $I_{0+}^{\alpha}D_{0+}^{\alpha}u(t)=u(t)+c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2}+\cdots+c_Nt^{\alpha-N}$. 令 $X=\{x\mid x,D_{0+}^{\alpha-1}x\in C[0,1]\}$, $\|x\|=\max\{\|x\|_\infty,\|D_{0+}^{\alpha-1}x\|_\infty\}$, $\|x\|_\infty=\max_{t\in[0,1]}|x(t)|$; $Y=L^1[0,1]$. 其中范数定义为: $\|y\|_1=\int_0^1|y(t)|\mathrm{d}t$. 定义算子 $L:\mathrm{dom}\ L\subset X\to Y$ 为 $L=D_{0+}^{\alpha}$, 其中 $\mathrm{dom}\ L=\{x\in X\mid D_{0+}^{\alpha}x\in L^1[0,1],x(0)=x'(0)=\cdots x^{(n-3)}(0)=0,D_{0+}^{\alpha-1}x(0)=\sum_{i=1}^{k}a_iD_{0+}^{\alpha-1}x(\xi_i),D_{0+}^{\alpha-2}x(1)=\sum_{j=1}^{m}b_jD_{0+}^{\alpha-2}x(\eta_j)\}$.

定义算子 $N:X\to Y$, $Nx(t)=f(t,x(t),D_{0+}^{\alpha-1}x(t))$, $x\in X$, $t\in[0,1]$, 则式(1)(2)转化为算子方程$Lx=Nx$.

2 主要结果

定义线性泛函 $T_1,T_2,Q_1,Q_2:Y\to R$:

$$T_1y=\int_0^1(1-s)y(s)\mathrm{d}s-\sum_{j=1}^{m}b_j\int_0^{\eta_j}(\eta_j-s)y(s)\mathrm{d}s$$

$$T_2y=\sum_{i=1}^{k}a_i\int_0^{\xi_i}y(s)\mathrm{d}s,\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}y=\frac{1}{e}\begin{bmatrix}e_1&-e_2\\-e_3&e_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}T_1\\T_2\end{bmatrix}y$$

定义线性算子: $P:X\to X$, $Q:Y\to Y$: $Px(t)=\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}D_{0+}^{\alpha-1}x(0)+\dfrac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}D_{0+}^{\alpha-2}x(0)$, $x\in X$, $Qy(t)=(Q_1y)t+Q_2y$, 即 $Qy=[t\quad 1]\begin{bmatrix}Q_1\\Q_2\end{bmatrix}y$, $y\in Y$.

引理 4 若(H_1)(H_2)成立,则(1) P, Q 为投影算子;(2) $\mathrm{Ker}\ Q=\mathrm{lm}\ L$, $\mathrm{lm}\ P=\mathrm{Ker}\ L$, $X=\mathrm{Ker}\ L\oplus\mathrm{Ker}\ P$, $Y=\mathrm{lm}\ L\oplus\mathrm{lm}\ P$, L 为指标为零的 Fredholm 算子; $L|_{\mathrm{dom}\ L\cap\mathrm{Ker}\ P}$是可逆的,设其逆算子为 K_p, 则 K_p 可表为:

$$K_p y = I_{0+}^{\alpha} y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\,\mathrm{d}s$$

证明　(1) 证 P,Q 为投影算子，此处只需证 P,Q 为幂等算子. 由引理 3 易证 $P^2=P$. 直接计算得：$T_1 1 = e_2, T_2 1 = e_1, T_1 t = e_4, T_2 t = e_3$.

$$Qy = \frac{1}{e}[t \quad 1]\begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ -e_3 & e_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} y \tag{3}$$

$$Q^2 y = \frac{1}{e^2}[t \quad 1]\begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ -e_3 & e_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}[t \quad 1]\begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ -e_3 & e_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} y =$$

$$\frac{1}{e^2}[t \quad 1]\begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ -e_3 & e_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_4 & e_2 \\ e_3 & e_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ -e_3 & e_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} y =$$

$$\frac{1}{e^2}[t \quad 1]\begin{bmatrix} e & o \\ o & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_1 & -e_2 \\ -e_3 & e_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} y = Qy$$

(2) 仿照文献[12]中引理 5 的证明，不难证出此结论. 此处从略，证毕.

引理 5　设 Ω 是 X 的有界开子集，则 N 在 $\overline{\Omega}$ 上 $L-$紧.

为得到主要结果，作出如下假设：

(H_4) 存在函数 $\psi. g. h \in L^1[0,1]$，使得 $|f(t,u,v)| \leqslant \psi(t) + g(t)|u| + h(t)|v|$，$d\|g\|_1 + 2\|h\|_1 < 1$，其中 $d = \dfrac{4}{\Gamma(\alpha-1)}$.

(H_5) $\exists l_1 > 0$，$\forall x \in \mathrm{dom}\, L$，如果 $\forall t \in [0,1]$，$|D_{0+}^{\alpha-1}x(t)| > l_1$，则 $\forall t \in [0,1]$，$\{D_{0+}^{\alpha-1}x(t)\} \cdot T_1 Nx(t) > 0$ 或 $\forall t \in [0,1]$，$\{D_{0+}^{\alpha-1}x(t)\} \cdot T_1 Nx(t) < 0$.

(H_6) $\exists l_2 > 0$，$\forall x \in \mathrm{dom}\, L$，如果 $\forall t \in [0,1]$，$|D_{0+}^{\alpha-2}x(t)| > l_2$，则 $\forall t \in [0,1]$，$\{D_{0+}^{\alpha-2}x(t)\} \cdot T_2 Nx(t) > 0$，或 $\{D_{0+}^{\alpha-2}x(t)\} \cdot T_2 Nx(t) < 0$.

引理 6　设 (H_1)—(H_6) 成立，则：

(1) $\Omega_1 = \{x \mid x \in \mathrm{dom}\, L \backslash \mathrm{Ker}\, L, Lx = \lambda Nx, \lambda \in (0,1)\}$ 有界.

(2) $\Omega_2 = \{x \mid x \in \mathrm{Ker}\, L, Nx \in \mathrm{lm}\, L\}$ 有界.

证明　(1) $\forall x \in \Omega_1$，$Nx \in \mathrm{lm}\, L$，由 $\mathrm{lm}\, L = \{y \in Y \mid T_1 y = T_2 y = 0\}$，得 $T_1 Nx = T_2 Nx = 0$，由 $(\mathrm{H}_5)(\mathrm{H}_6)$，存在常数 $t_1 \in [0,1]$，$t_2 \in [0,1]$，使得 $|D_{0+}^{\alpha-1}x(t_1)| \leqslant l_1$，$|D_{0+}^{\alpha-2}x(t_2)| \leqslant l_2$. 由 $Lx = \lambda Nx$，$x(0) = x'(0) = \cdots = x^{(n-3)}(0) = 0$ 得：

$$x(t) = \frac{\lambda}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} Nx(s)\,\mathrm{d}s + c_1 t^{\alpha-1} + c_2 t^{\alpha-2} \tag{4}$$

由式(4)以及 $|D_{0+}^{\alpha-1}x(t_1)| \leqslant l_1$，$|D_{0+}^{\alpha-2}x(t_2)| \leqslant l_2$，及引理 3 推出：

$$|c_1| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left(l + \int_0^1 |Nx(s)|\,\mathrm{d}s\right),\quad |c_2| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}\left[l_1 + l_2 + 2\int_0^1 |Nx(s)|\,\mathrm{d}s\right]$$

又由

$$\int_0^1 |Nx(s)|\,\mathrm{d}s \leqslant \|\Psi\|_1 + \|g\|_1\|x\|_\infty + \|h\|_1\|D_{0+}^{\alpha-1}x\|_\infty \tag{5}$$

$$|x(t)| \leqslant \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t |Nx(s)|\,\mathrm{d}s + |c_1| + |c_2| \leqslant$$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-1)}[2l_1+l_2+4\int_0^1|Nx(s)|\mathrm{d}s]\leqslant$$
$$a+b\|x\|_\infty+c\|D_{0+}^{\alpha-1}x\|_\infty$$

其中 $a=\dfrac{2l_1+l_2}{\Gamma(\alpha-1)}+d\|\Psi\|_1,b=d\|g\|_1,c=d\|h\|_1,d=\dfrac{4}{\Gamma(\alpha-1)}$.

由式(5),$|D_{0+}^{\alpha-1}x(t)|=|\lambda\int_0^t Nx(s)\mathrm{d}s+c_1\Gamma(\alpha)|\leqslant l+2\|\psi\|_1+2\|g\|_1\|x\|_\infty+2\|h\|_1\|D_{0+}^{\alpha-1}x\|_\infty$,所以 $\|D_{0+}^{\alpha-1}x(t)\|_\infty\leqslant\dfrac{1}{1-2\|h\|_1}(l+2\|\psi\|_1+2\|g\|_1\|x\|_\infty)$,故 $\|x\|_\infty\leqslant\left[1-\dfrac{2c\|g\|_1}{(1-b)(1-2\|h\|_1)}\right]^{-1}\left[\dfrac{a}{1-b}+\dfrac{c}{(1-b)(1-2\|h\|_1)}(l+2\|\psi\|_1)\right]$,这说明 Ω_1 是有界的.

(2) 设 $x\in\Omega_2$,则 $x(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2},c_1,c_2\in R$,由 $Nx\in\mathrm{lm}\,L=\{y\in Y|T_1y=T_2y=0\}$ 得:$T_1Nx=T_2Nx=0$. 由(H_5),$|D_{0+}^{\alpha-1}x(t_1)|=|c_1|\Gamma(\alpha)\leqslant l_1,|c_1|\leqslant l_1/\Gamma(\alpha)$. 由($H_6$),$\exists t_2\in[0,1]$,使得 $|D_{0+}^{\alpha-2}x(t_2)|\leqslant l_2$,$|c_1\Gamma(\alpha)t_2+c_2\Gamma(\alpha-1)|\leqslant l_2,|c_2|\leqslant\dfrac{l_1+l_2}{\Gamma(\alpha-1)}$,故 Ω_2 有界.

引理 7 设(H_1)—(H_3)以及(H_5)(H_6)的前半部分成立,则 $\Omega_3=\{x|x\in\mathrm{Ker}\,L,\lambda Jx+(1-\lambda)QNx=0,\lambda\in[0,1]\}$ 有界,其中

$$J:\mathrm{Ker}\,L\to\mathrm{lm}\,Q,J(c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2})=\frac{1}{e}(e_4c_2-e_3c_1)+\frac{1}{e}(e_1c_1-e_2c_2)t$$

即有

$$J(c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2})=\frac{1}{e}[t\quad 1]\begin{bmatrix}e_1 & -e_2\\ -e_3 & e_4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\end{bmatrix},\forall c_1,c_2\in R \tag{6}$$

证明 设 $x\in\Omega_3$,则 $\exists c_1,c_2$ 及 $\lambda\in[0,1]$ 使得 $x(t)=c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2},\lambda Jx+(1-\lambda)QNx=0$,由式(3)(6),及($H_2$)不难推出:

$$\lambda c_1+(1-\lambda)T_1N(c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2})=0\quad(A_1)$$
$$\lambda c_2+(1-\lambda)T_2N(c_1t^{\alpha-1}+c_2t^{\alpha-2})=0\quad(A_2)$$

$D_{0+}^{\alpha-1}x(t)=c_1\Gamma(\alpha),\Gamma(\alpha)>0$,用反证法. 由($A_1$)及($n-1<\alpha<n$))的前半部分易知,($H_5$)中假设不成立,故 $\exists t_1\in[0,1]$,使得 $|D_{0+}^{\alpha-1}x(t_1)|=|c_1|\Gamma(\alpha)\leqslant l_1,|c_1|\leqslant l_1/\Gamma(\alpha)$. 由($H_6$)的前半部分,若 $\forall t\in[0,1]$,则 $\mathrm{sgn}\{D_{0+}^{\alpha-1}x(t)\}\cdot T_2Nx(t)>0,\forall t\in[0,1]$,故由 $\mathrm{sgn}[D_{0+}^{\alpha-2}x(0)]\cdot T_2Nx=\mathrm{sgn}[c_2\Gamma(\alpha-1)]$ 得$\mathrm{sgn}[D_0^{\alpha-2}+x(0)]\cdot T_2Nx=\mathrm{sgn}[c_2\Gamma(\alpha-1)]\cdot T_2Nx=\mathrm{sgn}[c_2]\cdot T_2Nx>0$,这与($A_2$)矛盾,故($H_6$)中的假设不成立,即 $\exists t_2\in[0,1]$,使得 $|D_{0+}^{\alpha-2}x(t_2)|\leqslant l_2,|c_1\Gamma(\alpha)t_2+c_2\Gamma(\alpha-1)|\leqslant l_2,|c_2|\leqslant\dfrac{l_1+l_2}{\Gamma(\alpha-1)}$,故 Ω_3 有界.

注 1 若(H_1)—(H_3)以及(H_5)(H_6)的后半部分成立,则 $\Omega'_3=\{x|x\in\mathrm{Ker}\,L,-\lambda Jx+(1-\lambda)QNx=0,\lambda\in[0,1]\}$ 有界.

定理 1 若(H_1)—(H_4)成立,以及(H_5)(H_6)的前半部分或后半部分成立,则式(1)(2)在 X 中至少有一解.

证明 设 X 的有界开子集 $\Omega\supset\cup_{i=1}^3\bar{\Omega}_i\cup\{0\}$(或 $\Omega\supset\cup_{i=1}^2\bar{\Omega}_i\cup\bar{\Omega}'_3\cup\{0\}$),由引理 5,知 N 在 $\bar{\Omega}$ 上 L-紧,则由引理 6,有:

(1) $Lx\neq\lambda Nx,\forall(x,\lambda)\in[(\mathrm{dom}\,L\backslash\mathrm{Ker}\,L)\cap\partial\Omega]\times(0,1)$.

(2) $Nx \notin \mathrm{Im}\, L, \forall x \in \mathrm{Ker}\, L \cap \partial\Omega$.

于是只需要证 $\deg(QN|_{\mathrm{Ker}\,L}, \Omega \cap \mathrm{Ker}\, L, 0) \neq 0$.

令 $H(x,\lambda) = \pm Jx + (1-\lambda)QNx$,由引理 7(或注 1),有 $\forall x \in \partial\Omega \cap \mathrm{Ker}\, L, H(x,\lambda) \neq 0$. 由 Brouwer 度的同伦不变性,有 $\deg(QN|_{\mathrm{Ker}\,L}, \Omega \cap \mathrm{Ker}\, L, 0) = \deg(H(\cdot,0), \Omega \cap \mathrm{Ker}\, L, 0) = \deg(H(\cdot,1), \Omega \cap \mathrm{Ker}\, L, 0) = \deg(\pm J, \Omega \cap \mathrm{Ker}\, L, 0) = 1 \neq 0$.

由引理 1,$Lx = Nx$ 在 $\mathrm{dom}\, L \cap \overline{\Omega}$ 中至少有一个解,即式(1)(2)在 X 中至少有一个解. 证毕.

3 实 例

考虑如下 FBVP:

$$D_{0+}^{\frac{7}{2}} x(t) = f(t, x(t), D_{0+}^{\frac{5}{2}} x(t)), \text{a. e. } t \in [0,1] \tag{7}$$

$$x(0) = x'(0) = 0, D_{0+}^{\frac{5}{2}} x(0) = D_{0+}^{\frac{5}{2}} x\left(\frac{1}{4}\right), D_{0+}^{\frac{3}{2}} x(1) = -2D_{0+}^{\frac{3}{2}} x\left(\frac{1}{4}\right) + 3D_{0+}^{\frac{3}{2}} x\left(\frac{1}{2}\right) \tag{8}$$

其中 $f(t,u,v) = \begin{cases} t^2 + \sqrt[3]{v}t, t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], |v| > 1 \\ t^2 + v^3 t, t \in \left[0, \frac{1}{4}\right], |v| \leqslant 1 \\ t^2, t \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \\ t^2 + \sqrt[3]{u} t^4, t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], |u| > 1 \\ t^2 + u^3 t^4, t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right], |u| \leqslant 1 \end{cases}$.

这相当于在式(1)(2)中,$\alpha = \frac{7}{2}, n = 4, k = 1, m = 2, a_1 = 1, \xi_1 = \frac{1}{4}, \eta_1 = \frac{1}{4}, \eta_2 = \frac{1}{2}, b_1 = -2, b_2 = 3$ 的情形.

取 $e_1 = \frac{1}{4}, e_2 = \frac{3}{16}, e_3 = \frac{1}{32}, e_4 = \frac{7}{64}, e = \frac{11}{512}, d = \frac{16}{3\sqrt{\pi}}, \Psi(t) = t^2, t \in [0,1], g(t) = \begin{cases} 0, t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ t^4, t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$,

$h(t) = \begin{cases} t, t \in \left[0, \frac{1}{4}\right] \\ 0, t \in \left(\frac{1}{4}, 1\right] \end{cases}$.

令 $r = 1, l = 125$ 计算得(H_1)—(H_4)成立,以及(H_5)(H_6)的前半部分成立,由定理 1,式(7)(8)至少有一解.

参考文献:

[1] XUE C, GE W. The 195 existence of solutions for multi-point boundary value problem at resonance[J]. Acta Math Sin, 2005, 48: 281-290

[2] FENG W, WEBB J R L. Solvability of m-point boundary value problem with nonlinear growth[J]. J Math Anal Appl, 1997, 212:

467-480

[3] LIU B. Solvability of muiti-point boundary value problemat resonance(Ⅱ) [J]. Appl Math Comput,2003,136:353-377

[4] GUPTA C P. Sovability of multi-point boundary value problem at resonance[J]. Results Math,1995,28:270-276

[5] PREZERADZKI B,STANCZY R. Solvability of a multi-point boundary value problem at resonance[J]. J Math Anal Appl,2001,264:253-261

[6] MA R. Existence results of a m-point boundary value problem at resonance[J]. J Math Anal Appl,2004,294:147-157

[7] NAGLE R K,POTHOVEN K L. On athird-order nonlinear boundary value problem at resonance[J]. J Math Anal Appl,1995,195:148-159

[8] KARAKOSTAS G L,TSAMATOS P CH. On a nonlocal boundary value problem at resonance[J]. J Math Anal Appl,2001,259:209-218

[9] ZHANG Y,BAI Z. Existence of solutions for nonlinear fractional three-point boundary value problems at resonance[J]. J Appl Math Comput,2011,36:417-440

[10] MAWHIN J. NSFCBMS Regional Conference Series in Mathematicns[M]. America Mathematicial Society,Providence,RI,1979

[11] KILBAS A A, SRIVASTAVA H M, TRUJILLO J J. Theory and Applications of Fractional Differendial Equations [M]. Elsevier,2006

[12] JIANG W H. The existence of solutions to boundary value problems of fractional differential Equations at resonance[J]. Nonliear Analysis,2011,74:1987-1994

The Existence of Boundary Value Problem at Resonance of a Class of Fractional Differential Equations

YUAN You-cheng, ZHOU Zong-fu, ZHOU Hui

(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: By using the coincidence degree theory, we study the existence of boundary value problems at resonance of a class of fractional differential equations with order $\alpha(n-1<\alpha<n)$, and get a sufficient condition of its existence of the solution. An example is given to illustrate our result.

Key words: boundary value problems at resonance; fractional integral; fractional derivative

责任编辑:李翠薇