文章编号:1672 -058X(2012)02 -0043 -04

抵押贷款共同保险的两种评价方法及其比较*

陈丽萍
(湖南财政经济学院,长沙 410205)

摘 要:引入期权定价理论,利用鞅方法和保险精算方法,在未偿付额为常数,房产价格服从一般 Itô 过程的情形下,得到了一类住房抵押贷款保险的鞅定价公式和保险精算定价公式,发现这两种定价结果是一致的.

关键词:住房抵押贷款,保证险,期权,鞅定价,保险精算定价

中图分类号:O211.6;F830.9 **文献标志码**: A

1 住房抵押贷款保险的简介

住房抵押贷款保险是发放贷款的银行(贷款机构)要求借款购房者(借款人)向保险公司(承保人)投保的险种. 由于风险分析和管理手段的落后,避险工具和市场的缺乏,我国保险公司曾经开办过一段时期的住房抵押贷款保证险被暂停办理. 然而,随着我国资本市场的不断发展和完善,尤其在由美国次级抵押贷款引发的全球金融风暴的大背景下,此项业务的发展将受到极大的重视,具有广阔的发展前景[1-5]. 在此借鉴国外保险的经验,在部分担保保证险的基础上进行了一定的创新设计,损失额在原始贷款本金 A_0 的一定比例 k_1 内,完全由保险公司承担;超过这一限额 k_1A_0 的部分,则按照一定的比例 k_2 在保险公司和贷款机构之间分配损失额,因此不妨称它为共同保险.

若借款人在 $t=T$ 时刻违约,保险机构可采取以下两种方式履赔:

(1) 若损失额低于保险公司的限额 k_1A_0,则保险公司向贷款机构支付全部未偿贷款余额,并取得房产权由自己实现抵押权. 赔付额为 $\max(M(T)-\alpha H(T),0)$,其中 $M(T)$ 为 T 时刻未偿付金额,$H(T)$ 为 T 时刻的房产价格,α 为实现抵押权后所得住房价值比例,α 为常数.

(2) 若损失额超过保险公司的限额 k_1A_0,则由贷款机构保留房屋产权,保险公司给贷款机构的赔付额为:$k_1A_0+k_2[M(T)-\alpha H(T)-k_1A_0]$.

此时,贷款机构持有的抵押贷款保险保单到期收益为:

$$V_T=\begin{cases}\max(M(T)-\alpha H(T),0),\max(M(T)-\alpha H(T),0)<k_1A_0\\ k_1A_0+k_2[M(T)-\alpha H(T)-k_1A_0],M(T)-\alpha H(T)\geqslant k_1A_0\end{cases}\tag{1}$$

α 为实现抵押权后所得住房价值比例,α、k 为常数.

收稿日期:2011 -04 -21;**修回日期**:2011 -06 -20.
* **基金项目**:国家自然科学基金(10871064);湖南财政经济学院科研基金(k200909).
作者简介:陈丽萍(1979-),女,湖南湘潭人,讲师,硕士,从事数理金融研究.

2 数理金融模型的建立

考虑连续时间的金融市场,时间区间为$[0,T]$,0 表示现在,T 表示到期日. 给定某完备概率空间(Ω,F,P). 设 T 时刻的未偿付额 $M(T)\equiv M$ 为常数(可由风险信用评估得到),t 时刻的无风险利率为 $r(t)$,t 时刻的房产价格为 $H(t)$ 满足如下随机微分方程:

$$\frac{\mathrm{d}H(t)}{H(t)}=\mu(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}B(t),H(0)=H. \tag{2}$$

其中$(B(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$是一维标准布朗运动,$\mu(t)$,$\sigma(t)$,$r(t)$ 均为 t 的的确定性函数且 $\sigma(t)>0$,$r(t)>0$. $(F_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$为相应的自然信息流,$F_t=F$.

$$H(T)=H\exp\left(\int_0^T\left(\mu(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\right)\mathrm{d}t+\int_0^T\sigma(t)\mathrm{d}B(t)\right).$$

3 抵押贷款共同保险的鞅定价

假设金融市场是无套利的完备市场,取 $\theta(t)=\frac{\mu(t)-r(t)}{\sigma(t)}$. 定义过程 $Z(T)=\exp\{-\int_0^T\theta(t)\mathrm{d}B(t)-\frac{1}{2}\int_0^T\theta^2(t)\mathrm{d}t\}$,进而定义概率测度 $\tilde{P}(A)=\int_A Z(T)\mathrm{d}P,\forall A\in F$,由 Girsanov 定理,$\tilde{P}$ 是(Ω,F) 上的风险中性概率测度;定义 $\mathrm{d}\tilde{B}(t)=\mathrm{d}B(t)+\theta(t)\mathrm{d}t$,则$(\tilde{B}(t))_{0\leqslant t\leqslant T}$ 是$(\Omega,F,\tilde{P})$ 下的标准布朗运动. 在鞅测度 $\tilde{P}$ 下,房产价格 $H(t)$ 满足$\frac{\mathrm{d}H(t)}{H(t)}=r(t)\mathrm{d}t+\sigma(t)\mathrm{d}\tilde{B}(t),H(0)=H$.

定理 1 设市场完备、无套利,承保期为$[0,T]$,到期现金流满足式(1),无风险利率为 $r(t)$,未偿付额 $M(t)$ 恒为常数 M,房产价格 $H(t)$ 满足式(2),则抵押贷款共同保险的鞅定价为

$$\begin{aligned}V_0=&\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}[M\Phi(\mathrm{d}_2)+(k_1A_0-k_1k_2A_0+k_2M-M)\Phi(d_1)]-\\&\alpha H[\Phi(\sqrt{\kappa}-d_1)-\Phi(\sqrt{\kappa}-d_2)]-\alpha Hk_2\Phi(d_1-\sqrt{\kappa})\end{aligned} \tag{3}$$

其中,$d_1=\frac{\ln\left(\frac{M-k_1A_0}{\alpha H}\right)-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}}$,$d_2=\frac{\ln\left(\frac{M}{\alpha H}\right)-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}}$,$\kappa=\int_0^T\sigma^2(t)\mathrm{d}t$,$\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数.

证明 为简便起见,不妨设 $X=\frac{\int_0^T\sigma(t)d\tilde{B}(t)}{\sqrt{\kappa}}$,易知 $X\sim N(0,1)$;并定义

$$A=\{M(T)>\alpha H(T),M(T)-\alpha H(T)<k_1A_0\},B=\{M(T)-\alpha H(T)\geqslant k_1A_0\}.$$

则

$$\begin{aligned}V_0=&E^p[\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}(M-\alpha H(T))I_A]+E^p[\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}(k_1A_0+k_2(M-\alpha H(T)-k_1A_0))I_B]=\\&M\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}E^p[I_A]-\alpha\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}E^p[H(T)I_A]+\\&(k_1A_0-k_1k_2A_0+k_2M)\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}E^p[I_B]-\alpha k_2\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}E^p[H(T)I_B].\end{aligned} \tag{4}$$

先计算化简集合 A.

$$A=\{M(T)>\alpha H(T),M(T)-\alpha H(T)<k_1A_0\}=$$

$$\left\{\ln\left(\frac{M-k_1A_0}{\alpha H}\right)-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\kappa<\int_0^T\sigma(t)\,\mathrm{d}\tilde{B}(t)<\ln\left(\frac{M}{\alpha H}\right)-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\kappa\right\}=$$

$$\left\{d_1<\frac{\int_0^T\sigma(t)\,\mathrm{d}\tilde{B}(t)}{\sqrt{\kappa}}<d_2\right\}=\{d_1<X<d_2\}$$

类似地计算化简,得 $B=\{M(T)-\alpha H(T)\geqslant k_1A_0\}=\{X\leqslant d_1\}$. 则

$$E^p[I_A]=\Phi(d_2)-\Phi(d_1). \tag{5}$$

$$E^p[I_B]=\Phi(d_1). \tag{6}$$

$$\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}E^{\mathrm{P}}[H(T)I_A]=H\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\int_0^T r(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\,\mathrm{d}t}E^{\mathrm{P}}\left[\mathrm{e}^{\int_0^T\sigma(t)\,\mathrm{d}\tilde{B}(t)}I_{\{d_1<X<d_2\}}\right]=$$

$$H\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa}E^p\left[\mathrm{e}^{X\sqrt{\kappa}}I_{\{d_3<X<d_1\}}\right]=H[\Phi(\sqrt{\kappa}-d_1)-\Phi(\sqrt{\kappa}-d_2)] \tag{7}$$

$$\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}E^p[H(T)I_B]=H\mathrm{e}^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\int_0^T r(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\,\mathrm{d}t}E^p\left[\mathrm{e}^{\int_0^T\sigma(t)\,\mathrm{d}\tilde{B}(t)}I_{\{X\leqslant d_1\}}\right]=$$

$$H\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\kappa}E^p\left[\mathrm{e}^{X\sqrt{\kappa}}I_{\{-X\geqslant -d_1\}}\right]=H\Phi(d_1-\sqrt{\kappa}) \tag{8}$$

综合式(4)、(5)、(6)、(7)、(8),并进行适当化简,定理得证.

4　抵押贷款共同保险的保险精算定价

传统的鞅定价方法通常假设金融市场是无套利的完备市场. 在鞅方法下,一种证券(或衍生证券)现在的价格,可以将该证券未来期望现金流量折现而得到,且期望值折现可在风险中性下进行. 如果市场是有套利的(如风险资产的价格遵循几何分式 Brown 运动)不完备的(如风险资产的价格过程为指数 Levy 过程),这时等价鞅测度不存在或存在而不唯一,用传统的鞅定价方法就有一定的困难. 1998 年 Bladt 和 Rydberg[6] 首次提出了期权定价的保险精算方法. 保险精算方法将期权定价问题转化为等价的公平保费确定问题,由于无任何经济假设,所以它不仅对无套利、均衡、完备的市场有效,而且对有套利、非均衡、不完备的市场也有效.

定理 2　承保期为 $[0,T]$,到期现金流满足式(1),无风险利率为 $r(t)$,未偿付额 $M(T)$ 为常数 M,房产价格 $H(t)$ 满足(2),则抵押贷款共同保险的保险精算定价公式为

$$V_0=e^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}[M\Phi(d_2)+(k_1A_0-k_1k_2A_0+k_2M-M)\Phi(d_1)]-$$

$$\alpha H[\Phi(\sqrt{\kappa}-d_1)-\Phi(\sqrt{\kappa}-d_2)]-\alpha Hk_2\Phi(d_1-\sqrt{\kappa}) \tag{9}$$

其中, $d_1=\dfrac{\ln\left(\dfrac{M-k_1A_0}{\alpha H}\right)-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}}$, $d_2=\dfrac{\ln\left(\dfrac{M}{\alpha H}\right)-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t+\dfrac{1}{2}\kappa}{\sqrt{\kappa}}$, $\kappa=\int_0^T\sigma^2(t)\,\mathrm{d}t$, $\Phi(\cdot)$ 表示标准正态分布函数.

证明　为简便起见,不妨设 $Y=\dfrac{\int_0^T\sigma(t)\,\mathrm{d}B(t)}{\sqrt{\kappa}}$, 易知 $Y\sim N(0,1)$; 并定义 $C=\{e^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}M(T)>e^{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t}\alpha H(T), e^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}M(T)-e^{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t}\alpha H(T)<e^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}k_1A_0\}$, $D=\{e^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}M(T)-e^{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t}\alpha H(T)\geqslant e^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}k_1A_0\}$. 风险资产的期望收益率为 $\mathrm{e}^{\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t}=\dfrac{EH(T)}{H}=\mathrm{e}^{\int_0^T(\mu(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t))\,\mathrm{d}t}\mathrm{E}\left[\mathrm{e}^{\int_0^T\sigma^2(t)\,\mathrm{d}B(t)}\right]=\mathrm{e}^{\int_0^T\mu(t)\,\mathrm{d}t}$.

则:

$$V_0=E\left[e^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}MI_C\right]-\mathrm{E}\left[e^{-\int_0^T\beta(t)\,\mathrm{d}t}\alpha H(T))I_C\right]+E\left[e^{-\int_0^T r(t)\,\mathrm{d}t}(k_1A_0+k_2M-k_1k_2A_0)I_D\right]$$

$$-\alpha k_2 E[e^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}H(T))I_D] \tag{10}$$

先化简集合 C.

$$C=\{e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}M(T)>e^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}\alpha H(T),e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}M(T)-e^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}\alpha H(T)<e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}k_1A_0\}=$$

$$\left\{\ln\left(\frac{M-k_1A_0}{\alpha H}\right)-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\kappa<\int_0^T\sigma(t)\mathrm{d}B(t)<\ln\left(\frac{M}{\alpha H}\right)-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\kappa\right\}=$$

$$\left\{\mathrm{d}_1<\frac{\int_0^T\sigma(t)\mathrm{d}B(t)}{\sqrt{\kappa}}<d_2\right\}=\{d_1<Y<d_2\}$$

类似地计算化简,得 $D=\{e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}M(T)-e^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}\alpha H(T)\geqslant e^{-\int_0^T r(t)\mathrm{d}t}k_1A_0\}=\{Y\leqslant d_1\}$.
因此

$$E[I_C]=\Phi(d_2)-\Phi(d_1) \tag{11}$$

$$E[I_D]=\Phi(d_1) \tag{12}$$

另一方面,由引理知:

$$E[e^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}H(T)I_C]=He^{-\int_0^T\mu(t)\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\int_0^T\mu(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\mathrm{d}t}E[e^{\int_0^T\sigma(t)\mathrm{d}B(t)}I_{\{d_1<Y<d_2\}}]=$$

$$He^{-\frac{1}{2}\kappa}E[e^{Y\sqrt{\kappa}}I_{\{d_1<Y<d_2\}}]=H[\Phi(\sqrt{\kappa}-d_1)-\Phi(\sqrt{\kappa}-d_2)] \tag{13}$$

$$E[e^{-\int_0^T\beta(t)\mathrm{d}t}H(T)I_D]=He^{-\int_0^T\mu(t)\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\int_0^T\mu(t)-\frac{1}{2}\sigma^2(t)\mathrm{d}t}E[e^{\int_0^T\sigma(t)\mathrm{d}B(t)}I_{\{Y\leqslant d_1\}}]=$$

$$He^{-\frac{1}{2}\kappa}E[e^{Y\sqrt{\kappa}}I_{\{-Y\geqslant -d_1\}}]=He^{-\frac{1}{2}\kappa}e^{\frac{1}{2}\kappa}\Phi(d_1-\sqrt{\kappa})=H\Phi(d_1-\sqrt{\kappa}) \tag{14}$$

综上可知,定理得证.

5 传统的鞅定价与保险精算定价——两种定价结果的比较

将定理 1 与定理 2 进行对比,可以看出:在相同的市场模型下,当房产价格服从一般 *Ito* 过程,未偿付额为常数时,保险精算定价和传统的鞅定价(又称无套利定价)是一致的,仅与波动率 $\sigma(t)$ 有关,而与预期收益率 $\mu(t)$ 无关. 这里的保险精算定价实质上是无套利定价. 但对其他的风险资产价格模型,保险精算定价可能是有套利的.

参考文献:

[1] 侯新华,田策. 住房抵押贷款保证险研究[J]. 中国房地产金融,2002(11):11-13

[2] 钱乃余. 发展我国住房抵押贷款保险之构想[J]. 济南金融,2001(6):37-38

[3] 陈丽萍,杨向群. 房价服从非时齐 Poisson 跳扩散的住房抵押贷款保证险的定价[J]. 应用概率统计,2007,23(4):345-351

[4] 李晨,陈丽萍,杨向群. 随机波动率与跳扩散相结合的保证险的鞅定价[J]. 系统工程,2009,27(3):41-45

[5] 李晨,陈丽萍. 指数 O-U 过程下保证险的保险精算定价[J]. 数学的实践与认识,2009,39(4):21-26

[6] Bladt M T,Rydberg H.. An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumption[J]. Insurance:Mathematics and Economics,1998,22(1):65-73

(下转第 103 页)