文章编号:1672 - 058X(2012)02 - 0028 - 06

模式转换下随机利率与违约风险的投资组合*

梁 月, 王子亭**, 王晓洁

(中国石油大学 理学院,山东 青岛 266555)

摘 要:考虑 Markov 调制的模式转换市场模型,研究了影响金融市场的宏观因素,其中随机利率风险服从 Vasicek 模型,违约风险服从 CIR 模型;研究了市场下的最优投资组合问题,应用动态规划原理、HJB 方程理论及偏微分方程理论,得到 HJB 方程的闭形式的解,并证明了 HJB 方程的解是最优投资组合的值函数,得到了最优投资策略的显式表示。

关键词:模式转换,随机利率,违约风险,HJB 方程,CRRA 型效用函数

中图分类号:O231.3 **文献标志码:** A

近几年全球不断爆发的金融危机和次贷危机使人们更加关注金融市场中的风险管理问题。对投资组合的风险评估要求对金融市场进行更准确的建模,不仅要考虑金融市场的微观影响因素,同时也要考虑其宏观影响因素。具有 Markov 调制的模式转换市场模型把经济周期性影响和模式制度转换等宏观经济因素纳入到金融市场模型,使金融市场模型更能准确的反应金融市场的变换情况。

对于投资组合的风险评估,利率风险和违约风险是主要的影响因素,因此,主要考虑了利率风险与违约风险。在随机利率下,资产价值随机微分方程不满足 Lipschitz 条件和线性增长条件,故不能用一般的验证定理[1]来证明所构造的投资策略的最优性。针对 Vasicek 模型以及 Ho-Lee 模型,文献[2]给出了一个修正的验证定理,能够采用随机最优控制的方法给出投资于银行存款、无违约风险零息票债券和股票的最优投资策略。

徐彩霞等[3]考虑了投资方案的优化组合模型;Hou[4]考虑了金融市场中同时存在利率风险与违约风险的最优投资组合问题,假设利率和信用利差服从 Vasicek 模型;而王利峰[5]将其改进,假设利率和信用利差服从 CIR 模型;考虑在 Markov 调制的模式转换市场中,利率服从 Vasicek 模型,信用利差服从 CIR 模型,得出投资与银行存款、无违约风险零息票债券、有违约风险零息票债券和股票的最优投资策略。

1 问题描述

考虑在 Markov 调制的模式转换市场以及随机利率情况下带有违约风险的投资组合问题。在完备概率空间(Ω,F,P)下,考虑连续时间的稳定的 Markov 过程$\{M(t):t\in[0,T]\}$,有右连续轨迹,并且在有限状态空间$\overline{M}=\{1,2,\cdots N\}$里取离散值,其中 $M(t)$的不同状态代表不同的经济市场模式。不失一般性的记状态空间

收稿日期:2011 - 05 - 05;**修回日期:**2011 - 07 - 04.

* **基金项目:**中国石油大学(华东)研究生创新基金资助项目.

作者简介:梁月(1987-),女,北京市人,硕士研究生,从事金融数学与随机分析的研究.

** **通信作者:**王子亭(1956-),男,山东人,博士,教授,硕士生导师,从事金融数学、抛物型偏微分方程理论及其计算的研究.

为 $E=\{e_1,\cdots,e_N\}$,其中 $e_i=(0,\cdots,1,\cdots,0)'\in R^N,i=1,\cdots,N$,这个称为状态空间的规范标识。设$M(t)$的生成元为 $Q=(q_{ij})_{N\times N}$,其中 N 是状态空间的状态数。

在规范标识下,Elliott et al.[6](1994)提供了过程$\{M(t):t\in[0,T]\}$的半鞅表示:

$$M(t)=M(0)+\int_0^t QM(s)\mathrm{d}s+\widetilde{W}(t) \tag{1}$$

其中$\{\widetilde{W}(t)\}$为 $M(t)$生成的滤波对应的 R^N-值的鞅。

在上述完备概率空间中,$W(\cdot)=(W_1(\cdot),W_2(\cdot),W_3(\cdot))^{\mathrm{T}}$ 是三维标准布朗运动,其中 W_1,W_2,W_3 相互独立,$F=\{F_t\}_{t\in[0,T]}$是由布朗运动 $W(\cdot)$生成的自然 σ-域流,满足通常条件,其中 $T\in(0,+\infty)$,对任意的 $t\in[0,T],F_t\in\wp$。

参照文献[5]的市场模型,考虑的金融市场包括 4 种证券:银行存款、无违约风险零息票债券、有违约风险零息票债券和股票。假设市场是无套利的,Q 是 P 的等价鞅概率测度,使得市场上任意可交易资产的价格关于无风险利率 $r(\cdot)$的贴现价格在测度 Q 下都是鞅。

假设短期利率 $r(\cdot)$满足随机利率的 Vasicek 模型:

$$\mathrm{d}r(t)=\alpha_1(\theta_1(t)-r(t))\mathrm{d}t+\sigma_1(t)\mathrm{d}W_1(t),r(0)=r_0>0 \tag{2}$$

其中 α_1 为正常数,$\theta_1(t)=[\theta_1,M(t)],\sigma_1(t)=[\sigma_1,M(t)]$在 t 时刻对应的市场模式中为正的常数。

假设银行存款 $B(t)$满足微分方程:$\mathrm{d}B(t)=r(t)B(t)\mathrm{d}t,B(0)=1$。

假设无违约风险零息票债券的票面金额为 1,到期时刻为 $T_1(T_1\leqslant T)$,其价格 $P_1(t,T_1)$满足随机微分方程:

$$\mathrm{d}P_1(t,T_1)=P_1(t,T_1)[(r(t)+\zeta_1(t)\sigma_1(t)\lambda_1(t))\mathrm{d}t+\zeta_1(t)\sigma_1(t)\mathrm{d}W_1(t)],P_1(T_1,T_1)=1 \tag{3}$$

其中 $\lambda_1(t)$为 t 时刻无违约风险零息票债券的风险市价,$\lambda_1(t),\zeta_1(t)$为确定的连续函数。

假设有违约风险零息票债券的信用利差过程[5]$\delta(\cdot)$满足 CIR 模型:

$$\mathrm{d}\delta(t)=\alpha_2(\theta_2(t)-\delta(t))\mathrm{d}t+\sigma_2\sqrt{\delta(t)}\mathrm{d}W_2(t),\delta(0)=\delta_0 \tag{4}$$

其中 α_2,σ_2 为正的常数,$\theta_2(t)=[\theta_2,M(t)]$在 t 时刻对应的市场模式中为正的常数,满足条件:$2\alpha_2\theta_2(t)>\sigma_2^2$。

票面金额为 1、到期时刻为 $T_1(T_1\leqslant T)$的有违约风险零息票债券的价格 $P(t,T_1)$满足如下随机微分方程:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}P(t,T_1)=&P(t,T_1)[(r(t)+\zeta_1(t)\sigma_1(t)\lambda_1(t)+\zeta_2\sigma_2\lambda_2\delta(t))\mathrm{d}t+\\&\zeta_1(t)\sigma_1(t)\mathrm{d}W_1(t)+\zeta_2\sigma_2\sqrt{\delta(t)}\mathrm{d}W_2(t)]P(T_1,T_1)=1\end{aligned} \tag{5}$$

其中 λ_2 为有违约风险零息票债券的风险市价,假设 λ_2,ζ_2 为确定的常数。

假设股票价格 $S(\cdot)$满足随机微分方程:

$$\mathrm{d}S(t)=S(t)[(r(t)+\sigma_3(t)\lambda_3(t))\mathrm{d}t+\sigma_3(t)\mathrm{d}W_3(t)],S(0)=s \tag{6}$$

其中 $\lambda_3(t)$为 t 时刻股票的风险市价,是确定的连续函数,$\sigma_3(t)=[\sigma_3,M(t)]$在 t 时刻对应的市场模式中为正的常数。

2　最优控制问题

考虑投资者的投资区间为$[0,\bar{T}]$,假设$\bar{T}<T_1$,总财富过程记为 $X(\cdot)$,记 $\pi(t)=(\pi_1(t),\pi_2(t),\pi_3(t))^{\mathrm{T}},t\in[0,\bar{T}]$,为投资策略,其中 $\pi_1(\cdot),\pi_2(\cdot),\pi_3(\cdot)$分别表示投资者在时间$[0,\bar{T}]$内投资于无违约风险零息票债券、有违约风险零息票债券、股票的金额所占总财富的比例,则 $1-\pi(t)^{\mathrm{T}}\vec{1}$为投资于银行存款的金额所占总财富的比例,其中$\vec{1}=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$。

在自融资的投资策略下,财富过程 $X^{\pi}(\cdot)$满足随机微分方程:

$$\mathrm{d}X^{\pi}(t)=X^{\pi}(t)\{[r(t)+\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(t)(\boldsymbol{\mu}(t)-r(t)\vec{1})]\mathrm{d}t+\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\sigma}(t)\mathrm{d}W(t)\},X^{\pi}(0)=x_0>0,\quad(7)$$

其中

$$\boldsymbol{\mu}(t)=\begin{pmatrix}r(t)+\zeta_1(t)\sigma_1(t)\lambda_1(t)\\ r(t)+\zeta_1(t)\sigma_1(t)\lambda_1(t)+\zeta_2\sigma_2\lambda_2\delta(t)\\ r(t)+\sigma_3(t)\lambda_3(t)\end{pmatrix},\boldsymbol{\sigma}(t)=\begin{pmatrix}\zeta_1(t)\sigma_1(t)&0&0\\ \zeta_1(t)\sigma_1(t)&\zeta_2\sigma_2\sqrt{\delta(t)}&0\\ 0&0&\sigma_3(t)\end{pmatrix}。$$

则最优控制问题(P)为:

对给定的初始财富 $x_0>0$,寻找可允许的投资策略 $\boldsymbol{\pi}^*(t)$满足:

$$E[U(X^{\pi^*}(T))]=\max_{\pi(\cdot)\in A(0,x_0)}E[U(X^{\pi}(T))]\quad(8)$$

问题(P)称为相应与允许投资策略 $A(0,x_0)$的最优投资组合问题,对应 $\boldsymbol{\pi}^*(t)$满足上式(8),称 $\boldsymbol{\pi}^*(t)$为问题(P)的相应于允许投资策略 $A(0,x_0)$的最优投资策略。

假设投资者的效用函数为 CRRA 型,$U(x)=x^m,0<m<1$,定义值函数为 $V_i(t,x,r,\delta)=E[X^m(T)\mid X(t)=x,r(t)=r,\delta(t)=\delta,M(t)=i]$,则由动态规划原理得到,最优投资组合问题($P$)的 HJB 方程为:

$$\begin{cases}\max\limits_{\pi\in R^3}L^{\pi}V_i(t,x,r,\delta)=0,\quad t\in[0,\overline{T}],x,r,\delta\in(0,+\infty)\\ V_i(T,x,r,\delta)=x^m,\qquad x,r,\delta\in(0,+\infty)\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,N\quad(9)$$

这里的算子 L^{π} 定义如下:

$$\begin{aligned}L^{\pi}V_i(t,x,r,\delta)=&\frac{\partial V_i}{\partial t}+\frac{\partial V_i}{\partial x}x\{r(t)+(\pi_1+\pi_2)\zeta_1(t)\sigma_1(i)\lambda_1(t)+\\&\pi_2\zeta_2\sigma_2\lambda_2\delta(t)+\pi_3\sigma_3(i)\lambda_3(t)\}+\frac{\partial V_i}{\partial r}\alpha_1(\theta_1(i)-r(t))+\\&\frac{\partial V_i}{\partial\delta}\alpha_2(\theta_2(i)-\delta(t))+\frac{1}{2}\frac{\partial^2V_i}{\partial r^2}\sigma_1^2(i)+\\&\frac{1}{2}\frac{\partial^2V_i}{\partial\delta^2}\sigma_2^2\delta(t)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2V_i}{\partial x^2}x^2[(\pi_1+\pi_2)^2\zeta_1^2(t)\sigma_1^2(i)+\pi_2^2\zeta_2^2\sigma_2^2\delta(t)+\pi_3^2\sigma_3^2(i)]+\\&\frac{\partial^2V_i}{\partial x\partial r}x(\pi_1+\pi_2)\zeta_1(t)\sigma_1^2(i)+\frac{\partial^2V_i}{\partial x\partial\delta}x\pi_2\zeta_2\sigma_2^2\delta(t)+(V,Qe_i)\end{aligned}$$

3 问题求解

先来形式地求解上面的 HJB 方程,假设 t 时刻是,$M(t)=i$。

由于 $V(t,x,r,i)=\max\limits_{\pi}E[X(T)^m\mid X(t)=x,r(t)=r,M(t)=i]$,由方程(7)知道

$$X(t)=x_0\exp\left\{\int_0^t\left[r(s)+(\boldsymbol{\mu}(s)-r(s)\vec{1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}(s)-\frac{1}{2}\mid\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{\sigma}(s)\mid^2\right]\mathrm{d}s+\int_0^t\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{\sigma}(s)\mathrm{d}W(s)\right\}$$

代入得到:

$$V_i(t,x,r)=x^m\max_{\pi}E\left[\exp\begin{Bmatrix}m\int_t^{\overline{T}}\left[r(s)+(\boldsymbol{\mu}(s)-r(s)\vec{1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}(s)-\frac{1}{2}\mid\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{\sigma}(s)\mid^2\right]\mathrm{d}s\\+m\int_t^{\overline{T}}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{\sigma}(s)\mathrm{d}W(s)\end{Bmatrix}\right]$$

由于 $0<m<1$,得到:

$$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}=m(m-1)x^{m-2}\max_{\pi}\left[\exp\left\{\begin{array}{l}m\int_t^{\bar{T}}\left[r(s)+(\boldsymbol{\mu}(s)-r(s)\vec{1})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\pi}(s)-\frac{1}{2}|\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{\sigma}(s)|^2\right]\mathrm{d}s\\+m\int_t^{\bar{T}}\boldsymbol{\pi}^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{\sigma}(s)\mathrm{d}W(s)\end{array}\right\}\right]\leqslant 0$$

则$\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}<0$,则由一阶导数条件,可以得到最优投资策略 $\boldsymbol{\pi}^*(t)$具有下面的形式:

$$\pi_1^*=-\frac{\frac{\partial V_i}{\partial x}\lambda_1(t)+\frac{\partial^2 V_i}{\partial x\partial r}\sigma_1(i)}{\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}x\zeta_1(t)\sigma_1(i)}-\pi_2^*,\pi_2^*=-\frac{\frac{\partial V_i}{\partial x}\lambda_2+\frac{\partial^2 V_i}{\partial x\partial\delta}\sigma_2}{\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}x\zeta_2\sigma_2},\pi_3^*=-\frac{\frac{\partial V_i}{\partial x}\lambda_3(t)}{\frac{\partial^2 V_i}{\partial x^2}x\sigma_3(i)}$$

将 $\boldsymbol{\pi}^*(t)$带入到 HJB 方程(9)中,假设 $V_i(t,x,r,\delta)$,$i=1,2,\cdots,N$,具有形式如下:

$V_i(t,x,r,\delta)=g_i(t)\exp(n(t)r+\beta(t)\delta)x^m$,满足条件 $g_i(\bar{T})=1,n(\bar{T})=0,\beta(\bar{T})=0$

通过代入求解,得到 $V_i(t,x,r,\delta)=g_i(t)\exp(n(t)r+\beta(t)\delta)x^m$ 为 HJB 方程的解,这里

$$n(t)=\frac{m}{\alpha_1}(1-e^{\alpha_1(t-\bar{T})}),\beta(t)=\sqrt{\frac{D}{B}}\left[\frac{A}{2\sqrt{BD}}-1+\frac{2}{1-\left(1-\frac{4\sqrt{BD}}{2\sqrt{BD}-A}\right)e^{2\sqrt{BD}(t-\bar{T})}}\right]$$

其中 $A=\alpha_2+\frac{m\lambda_2}{(m-1)\zeta_2^2\sigma_2}$,$B=\frac{1}{2}\left(\sigma_2^2-\frac{m}{(m-1)\zeta_2^2}\right)$,$C=\frac{1}{2}\frac{m\lambda_2^2}{(m-1)\zeta_2^2\sigma_2^2}$,$D=C+\frac{A^2}{4B}$。

$g_i(t)$,$i=1,2,\cdots,N$,满足下面的常微分方程组:即 $g(t)=(g_1(t),g_2(t),\cdots,g_N(t))^{\mathrm{T}}$ 满足:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}g(t)}{\mathrm{d}t}+H(t)g(t)=0\\g(\bar{T})=\vec{1}_{N\times1}\end{cases}$$

其中 $H(t)=\mathrm{diag}(h_i(t))+Q$,

$$h_i(t)=n(t)\alpha_1\theta_1(i)+\beta(t)\alpha_2\theta_2(i)+\frac{1}{2}n^2(t)\sigma_1^2(i)-\frac{1}{2}\frac{m}{m-1}\left(\frac{(\lambda_1(t)+n(t)\sigma_1(i))^2}{\zeta_1^2(t)\sigma_1^2(i)}+\frac{\lambda_3^2(t)}{\sigma_3^2(i)}\right)$$

可以求解上述常微分方程组的解为 $\exp(\int_t^{\bar{T}}H(s)\mathrm{d}s)$,并可以验证其是唯一的解。

将 $V_i(t,x,r,\delta)=g_i(t)\exp(n(t)r+\beta(t)\delta)x^m$ 带入到最优投资策略 $\boldsymbol{\pi}^*(t)$中,得到:

$$\pi_1^*=-\frac{\lambda_1(t)+n(t)\sigma_1(i)}{(m-1)\zeta_1(t)\sigma_1(i)}-\pi_2^*,\pi_2^*=-\frac{\lambda_2+\beta(t)\sigma_2}{(m-1)\zeta_2\sigma_2},\pi_3^*=-\frac{\lambda_3(t)}{(m-1)\sigma_3(i)}\tag{10}$$

由此可知,最优投资策略是随着时间 t 变化而变化的,同时与 t 时刻对应的模式市场中的参数相关,也就是说在宏观因素的影响下,不同的市场模式下的最优投资策略是不同的。

可以看到,由于有违约风险的零息票债券的存在,它影响了在不考虑违约风险情况下的无违约风险的零息票债券的投资比例,但是没有影响股票的投资比例,这是由于考虑的股票的风险与利率风险和违约风险是独立的,即其满足的随机布朗运动是独立的。

注意到财富预算方程(7)中的系数不满足 Lipschitz 条件和线性增长条件,而且针对其中的 CIR 模型,不能直接引用文献[2]中的修正的验证定理来严格证明式(10)所定义的投资策略是最优的。为了克服这个困难,对于参数作了一些限制。

4　验证定理

采用文献[2]中的推论 2 来验证上述计算得到的投资策略为最优的投资策略。主要的证明过程相同,

只是由于信用利差满足 CIR 模型,根据文献[7]和文献[8]可知,需要满足一些条件才能应用文献[2]中的验证定理,在此处,主要给出所需要的条件和证明的主要过程。

命题1[7] 设 $\delta(t)$ 满足 $\mathrm{d}\delta(t)=k(\theta-\delta(t))\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{\delta(t)}\mathrm{d}W(t)$,则:

$$E[\exp\{\beta\int_0^{\mathrm{T}}\delta(s)\mathrm{d}s\}]<\infty$$

成立的充要条件是下列条件成立:

1) $\beta\leqslant\dfrac{k^2}{2\sigma^2}$;

2) $\beta>\dfrac{k^2}{2\sigma^2}$,且 $T<\dfrac{1}{\gamma_2}\operatorname{arccot}\left(-\dfrac{\gamma_2}{\gamma_2}\right)$,其中 $\gamma_1=\dfrac{k}{2}$,$\gamma_2=\dfrac{\sqrt{-k^2+2\sigma^2\beta}}{2}$。

证明 见文献[7]中定理5.1的证明。

命题2[8] 当 $\delta(t)$ 满足 $d\delta(t)=k(\theta-\delta(t))\mathrm{d}t+\sigma\sqrt{\delta(t)}\mathrm{d}W(t)$,则 $\int_0^{\mathrm{T}}\delta(s)\mathrm{d}s<+\infty$ a.s.,$\int_0^{\mathrm{T}}\delta^2(s)\mathrm{d}s<+\infty$ a.s.。

证明 见文献[8]中定理2.1的证明。

(1) 由文献[2]中证明,根据随机微分方程的解的存在唯一定理,Vasicek 模型的系数满足相应的增长条件和 Lipschitz 条件,则对于任意的 $t\in[0,\bar{T}]$,满足 Vassicek 模型的利率 $r(t)$ 有:$\int_0^t|r(s)|\mathrm{d}s<\infty$ a.s.。

由于 $\zeta_1(t)$,$\lambda_3(t)$ 为确定的函数,以及根据命题2对 CIR 模型的结论知道:

$$\int_0^t[(\zeta_1(s)\sigma_1\lambda_1(s))^2+(\zeta_1(s)\sigma_1\lambda_1(s)+\zeta_2\sigma_2\lambda_2\delta(s))^2+(\sigma_3\lambda_3(s))^2]\mathrm{d}s<\infty\quad \text{a.s.}$$

则可以得到式(7)有唯一的解:

$$X^\pi(t)=x_0\exp\left\{\int_0^t\left[r(s)+(\mu(s)-r(s)\vec{1})^{\mathrm{T}}\pi(s)-\frac{1}{2}|\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)|^2\right]\mathrm{d}s+\int_0^t\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}$$

(2) 容易知道,值函数满足多项增长条件以及上面所求得的 $V\in C^{1,2}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 为 HJB 方程的解。

(3) 由于对所有的 $x_0\in R$,带有初值条件的随机微分方程(7)都有唯一的解 $X^\pi(t)$,方程(7)的系数都是确定的,则对所有的 $k\in N$,满足可积性条件 $E(\int_0^{\bar{T}}|\pi(s)|^k\mathrm{d}s)<\infty$,而且满足 $E[\sup\limits_{t\in[0,\bar{T}]}|X^{\pi^*}(t)|^k]<\infty$,这是由于:

$$\begin{aligned}
|X^\pi(t)|^k&=x_0^k\exp\left\{k\int_0^t\left[r(s)+(\mu(s)-r(s)\vec{1})^{\mathrm{T}}\pi(s)-\frac{1}{2}|\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)|^2\right]\mathrm{d}s+k\int_0^t\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}=\\
&x_0^k\exp\left\{k\int_0^t[r(s)+\pi_1\zeta_1\sigma_1\lambda_1+\pi_2(\zeta_1\sigma_1\lambda_1+\zeta_2\sigma_2\lambda_2\delta(s))+\pi_3\sigma_3\lambda_3]\mathrm{d}s\right\}\\
&\exp\left\{k\int_0^t\left[-\frac{1}{2}(\pi_1+\pi_2)^2\zeta_1^2\sigma_1^2-\frac{1}{2}\pi_2^2\zeta_2^2\sigma_2^2\delta(s)-\frac{1}{2}\pi_3^2\sigma_3^2\right]\mathrm{d}s\right\}\exp\left\{k\int_0^t\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}=\\
&AA\cdot\exp\left\{k\int_0^t\left[\pi_2\zeta_2\sigma_2\lambda_2\delta(s)-\frac{1}{2}\pi_2^2\zeta_2^2\sigma_2^2\delta(s)\right]\mathrm{d}s\right\}\exp\left\{k\int_0^t\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}\leqslant\\
&AA\cdot\exp\left\{k\int_0^t[\pi_2\zeta_2\sigma_2\lambda_2\delta(s)]\mathrm{d}s\right\}\exp\left\{k\int_0^t\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}\quad(\text{由于}\ \delta(s)>0)=\\
&AA\cdot\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{k}{1-m}\lambda_2(\lambda_2+\beta(s)\sigma_2)\delta(s)\right]\mathrm{d}s\right\}\exp\left\{k\int_0^t\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}\leqslant\\
&AA\cdot\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{k}{1-m}\lambda_2^2\delta(s)\right]\mathrm{d}s\right\}\exp\left\{k\int_0^t\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}\quad(\text{由于}\ \beta(s)\leqslant 0)\quad \text{a.s..}
\end{aligned}$$

则 $E\mid X^{\pi}(t)\mid^{k}\leqslant \overline{A}\overline{A}\cdot\exp\left\{\int_0^t\left[\frac{k}{1-m}\lambda_2^2\delta(s)\right]\mathrm{d}s\right\}$ a. s. 其中 $AA<\infty$ 与 $\overline{A}\overline{A}<\infty$。

同理,对于值函数 $V_i(t,x,r,\delta)=g_i(t)\exp\{n(t)r+\beta(t)\delta\}x^m$ 应用同样的放缩后,有:

$$V_i(t,x,r,\delta)\leqslant BB\cdot\exp\left\{\rho\beta(t)\delta(t)+\frac{\rho m}{1-m}\lambda_2^2\int_0^t\delta(s)\mathrm{d}s\right\}\exp\left\{\rho\int_0^t\pi^{\mathrm{T}}(s)\sigma(s)\mathrm{d}W(s)\right\}\text{ a. s.},$$

$$EV_i(t,x,r,\delta)\leqslant\overline{B}\overline{B}\cdot\exp\left\{\frac{\rho m}{1-m}\lambda_2^2\int_0^t\delta(s)\mathrm{d}s\right\}\text{ a. s.},\text{其中 }BB<\infty\text{ 与 }\overline{B}\overline{B}<\infty$$

根据命题1,给出如下条件:

令 $\overline{m}=\min\left\{1-\frac{2\lambda_2^2\sigma_2^2}{\alpha_2^2}k,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_2^2+2\lambda_2^2\sigma_2^2\rho}\right\},m\in[0,\overline{m}]$,或者

$$\overline{m}=\max\left\{1-\frac{2\lambda_2^2\sigma_2^2}{\alpha_2^2}k,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_2^2+2\lambda_2^2\sigma_2^2\rho}\right\},m\in[\overline{m},1]\text{ 且 }T<\frac{1}{\gamma_{\max}}arc\cot\left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_{\max}}\right).$$

其中 $\gamma_{\max}=\max\left\{\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha_2^2+2\sigma_2^2\lambda_2^2\frac{k}{1-m}},\frac{1}{2}\sqrt{-\alpha_2^2+2\sigma_2^2\lambda_2^2\frac{m\rho}{1-m}}\right\}$, 则有 $E[\sup_{t\in[0,T]}\mid X^{\pi^*}(t)\mid^{k}]<\infty$, $E[\sup_{t\in[0,T]}\mid V(t,X(t),r(t),\delta(t),M(t))\mid^{\rho}]<\infty$。

通过上述证明,满足文献[2]中推论3.2的所有条件,则对于任意的 t 时刻,对应于 $M(t)=i$ 市场模式,此时的 $V_i(t,x,r,\delta)$ 是对应的HJB方程的解,即 $V(t,X(t),r(t),\delta(t),M(t))$ 是HJB方程(9)的解,以及对应的 $\pi^*(t)=(\pi_1^*(t),\pi_2^*(t),\pi_3^*(t))$ 是最优的投资策略。

5　结论

将文献[4]和文献[5]中的问题推广到Markov调制的模式转换市场下,同时考虑随机利率风险与违约风险,得到此市场环境下的最优投资策略。而且最优投资策略是随着时间 t 的变化而变化的,同时与 t 时刻对应的模式市场中的参数相关,也就是说在宏观因素的影响下,不同的市场模式下的最优投资策略是不同的。

参考文献:

[1] FLEMING W H,SONER H M. Controlled markov process and viscosity solutions[M]. New York:Springer,1993

[2] RALF K,HOLGER K. A stochastic control approach to portfolio problems with stochastic interest rates[J]. SIAM Journal on Control and Optimization,2001,40(4):1250-1269

[3] 徐彩霞,周旭,宋宏伟.投资方案的优化组合模型[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2004,21(3):213-215

[4] HOU Y F. Integrating market risk and credit risk:A dynamic asset allocation perspective[EB/OL]. http://www.afajof.org/pdfs/2003program/abstracts/hou.pdf,2002

[5] 王利峰,孟庆欣.随机利率下有违约风险的最优投资组合[J].复旦学报:自然科学版,2005(3):382-394

[6] MERTON R C. Optimal consumption and portfolio rules in a continuous-time model[J]. J Econ Theory,1971(3):373-413

[7] MICHAEL I T,ZENG X D. A general stochastic volatility model and optimal portfolio with explicit solutions[EB/OL]. http://www.math.missouri.edu/~zeng/pub/ageneral.pdf

[8] YAN L T,LI Y C. Maximal inequalities for CIR processes[J]. Letters in Mathematical Physics,2004,67:111-124

(下转第38页)