文章编号:1672 - 058X(2012)02 - 0023 - 05

行反正交矩阵的一些性质*

贾书伟,何承源
(西华大学 数学与计算机学院,成都 610039)

摘　要: 给出行反正交矩阵的概念,并讨论其行列式、可逆性、迹、特征值等问题,得到行反正交矩阵的行列式、逆矩阵、特征值与迹;并得出了以下主要结果:行反正交矩阵是行列对称矩阵,它本身以及它的行转置和列转置矩阵都是可逆矩阵;行反正交矩阵的转置矩阵以及它的行转置和列转置矩阵都仍是行反正交矩阵;行反正交矩阵的行转置矩阵的逆矩阵等于其逆矩阵的行转置,其列转置矩阵的逆矩阵等于其逆矩阵的列转置;它的行转置矩阵的转置等于其转置矩阵的行转置,它的列转置矩阵的转置等于其转置矩阵的列转置.

关键词: 正交矩阵;行反正交矩阵;行列对称矩阵

中图分类号: O151.21　　　　**文献标志码:** A

正交矩阵作为一种特殊的矩阵,在整个矩阵理论体系中具有十分重要的作用,它的广泛应用推动了特殊类矩阵理论的深入研究. 文献[1]讨论了正交矩阵的性质,文献[2]给出了次正交矩阵的概念,并研究了次正交矩阵的性质,文献[3]将次正交矩阵的概念加以推广,给出了亚次正交矩阵的概念,文献[4]和[5]给出了广义次对称(反次对称)矩阵和广义次正交矩阵的概念,并讨论了它们的性质及它们之间的关系,文献[6]研究了 k-拟次正交矩阵的性质,文献[7]给出了右转置矩阵、左转置矩阵和全转置矩阵与正交矩阵的充分必要条件及一些相关结果,文献[8]介绍了复方阵的次正定性,文献[9]和[10]研究了复正定矩阵的一些性质. 近年来,一些矩阵论工作者对矩阵引入了行转置矩阵概念[11],并研究它的一些性质[12-14],进而又有矩阵论工作者讨论了矩阵的行正定性[15]和行正交性[16-17]问题,但很少有矩阵论工作者讨论行反正交性问题. 因此,在此基础上,在此引进行反正交矩阵的概念,并讨论其行列式、可逆性、迹、特征值等问题,得到行反正交矩阵的一些性质.

为方便讨论,规定 A^{-1},A^*,A^{T},$|A|$,$\mathrm{tr}(A)$ 分别为矩阵 A 的逆矩阵,伴随矩阵,转置矩阵,行列式与迹,R 表示实数域集合,$R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 实矩阵,N_+ 表示正整数集合,E 表示 n 阶单位矩阵,$J_n=J$ 表示次对角线上元素全为 1,其余元素全为 0 的 n 阶方阵,“$A\Rightarrow B$”表示由 A 可以推出 B.

1　定义和引理

定义 1[11]　设 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$,则矩阵 A 的行转置矩阵与列转置矩阵,并记为 A^R 与 A^C,即:

收稿日期: 2011 - 04 - 20;**修回日期:** 2011 - 05 - 17.

* **基金项目:** 西华大学应用数学校重点学科(ZXD0910-09-1)项目.

作者简介: 贾书伟(1982-),男,河南平顶山人,助教,硕士,从事矩阵理论方面的研究.

$$A^R = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ a_{11} & a_{12} & \cdots \end{bmatrix}, A^C = \begin{bmatrix} a_{1n} & a_{1,n-1} & \cdots \\ a_{2n} & a_{2,n-1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m-1,n} & a_{m-1,n-1} & \cdots \\ a_{mn} & a_{m,n-1} & \cdots \end{bmatrix}$$

特别:若 $A^R = A(A^C = A)$,则 A 称为行(列)对称矩阵;若 $A^R = -A(A^C = -A)$,则 A 称为行(列)反对称矩阵;若 $A^R = A^C$,则 A 称为行列对称矩阵.

由定义不难得到:$J^{-1} = J^{\mathrm{T}} = J, J^R = J^C = J^2 = E$.

引理 1[12] 设 $A,B \in R^{m\times n}$,则有下列结论:

(1) $A^R = J_m A, A^C = AJ_n$;

(2) $(A^R)^R = A, (A^C)^C = A$;

(3) $(kA)^R = kA^R, (kA)^C = kA^C \quad (k \in R)$;

(4) $(A^R)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^C, (A^C)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^R$;

(5) $(A \pm B)^R = A^R \pm B^R, (A \pm B)^C = A^C \pm B^C$;

(6) 设 $B \in R^{n\times k}$,则 $(AB)^R = A^R B, (AB)^C = AB^C$.

引理 2[18] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$,$\lambda_i$ 是 A 的特征值,则有

$$\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A) = k\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = k\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (0 \neq k \in R)(i,j = 1,2,\cdots,n).$$

引理 3[19] $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$,且 A 为可逆矩阵,则 $A^* = |A| A^{-1}$.

引理 4[16] 设 $A \in R^{n\times n}$,且 A 可逆,则 $(A^{-1})^R = (A^C)^{-1}, (A^{-1})^C = (A^R)^{-1}$.

定义 2[17] 设 $A \in R^{n\times n}$,若 $A^R A = AA^R = kJ$(其中 $0 \neq k \in R$),则 A 称为 k-行正交矩阵.

特别地,当 $k = 1$,则 A 称为行正交矩阵;当 $k = -1$ 时,有 $A^R A = AA^R = -J$,则 A 称为行反正交矩阵.

2 主要结果

定理 1 如果 $A \in R^{n\times n}$ 为行反正交矩阵,那么 A 为偶数阶方阵,并且其行列式为 1 或 -1 .

证明 当 A 为 k-行正交矩阵时,则有 $A^R A = AA^R = kJ, (0 \neq k \in R)$(两边同取行列式得)$|JAA| = |AJA| = |kJ| \Rightarrow |J| \, |A|^2 = k^n |J|$,因 J 为可逆矩阵,从而 $|A|^2 = k^n$,所以

$$|A| = \begin{cases} \pm\sqrt{k^n} & (k > 0) \\ \pm(\sqrt{-k}i)^n = \begin{cases} \pm(\sqrt{-k})^n & (n = 2m, m \in N_+) \\ \pm\sqrt{-k^n}i & (n = 2m-1, m \in N_+)(\star_1) \end{cases} & (k < 0) \end{cases}$$

$(\star_1)$ 与 $A \in R^{n\times n}, 0 \neq k \in R$ 矛盾,所以:此种情况不成立,故有

$$|A| = \begin{cases} \pm(\sqrt{k})^n & (k > 0) \\ \pm(\sqrt{-k})^n & (k < 0, \text{且 } n = 2m, m \in N_+) \end{cases}$$

又因 A 为行反正交矩阵,所以 $-1 = k < 0$,故 A 为偶数阶方阵,并且其行列式为 1 或 -1 .

推论 1 行反正交矩阵是可逆矩阵.

定理 2　如果 $A\in R^{n\times n}$ 为行反正交矩阵，则有以下结论：

（1）A^R,A^C 都是可逆矩阵；

（2）A 是行列对称矩阵；

（3）$(A^R)^T=(A^T)^R,(A^C)^T=(A^T)^C$；

（4）$(A^R)^{-1}=(A^{-1})^R,(A^C)^{-1}=(A^{-1})^C$；

（5）$A^{-1}=-A$.

证明　（1）由定理 1 知，$|A|\neq 0$，又因 J 为可逆矩阵，所以 $|J|\neq 0$，所以 $|A^R|=|JA|=|J||A|=|AJ|=|A^C|$，即 $|A^R|=|A^C|=|J||A|\neq 0$，故 A^R,A^C 也是可逆矩阵.

（2）因 A 是行反正交矩阵，从而 $A^RA=AA^R=-J$，结合引理 1 得 $JAA=AJA=-J$，又因 A 为可逆矩阵，等式两端右乘 A^{-1} 得：$JA=AJ$，即 $A^R=A^C$，由定义 1 知：A 是行列对称矩阵.

（3）由（2）知 $A^R=A^C$，再由引理 1 得：$(A^T)^R=(A^C)^T=(A^R)^T$，所以 $(A^R)^T=(A^T)^R$，类似的，可以证明 $(A^C)^T=(A^T)^C$；

（4）由（2）和引理 4 可知：$(A^{-1})^R=(A^C)^{-1}=(A^R)^{-1}$，即 $(A^R)^{-1}=(A^{-1})^R$，类似的方法可以证明：$(A^C)^{-1}=(A^{-1})^C$；

（5）由（2）知 $AJ=JA$，又因 A 是行反正交矩阵，所以 $A^RA=AA^R=-J$，从而 $JAA=AJA=JAA=-J\Rightarrow JAA=-J\Rightarrow J^2AA=-J^2\Rightarrow A(-A)=E$. 所以，$A^{-1}=-A$.

推论 2　行反正交矩阵和它的逆矩阵之和是零矩阵.

定理 3　设 $A\in R^{n\times n}$ 为行反正交矩阵，λ 是 A 的特征值，则

（1）$\lambda\neq 0$；

（2）A 的特征值为 i 或 $-i$.

证明　（1）λ 是 A 的特征值，则存在 $0\neq X\in R^{n\times 1}$，使 $AX=\lambda X$，假设 $\lambda=0$，则 $AX=0$，由定理 2 知 $|A|\neq 0$，所以齐次线性方程组 $AX=0$，仅有零解，即 $X=0$（矛盾），所以 $\lambda\neq 0$.

（2）根据条件可知 $A^RA=AA^R=-J$，则存在 $0\neq\alpha\in R^{n\times 1}$，使 $A\alpha=\lambda\alpha$，等式两端左乘 A^R 得：$A^RA\alpha=\lambda A^R\alpha\Rightarrow -J\alpha=\lambda JA\alpha=\lambda^2J\alpha\Rightarrow(1+\lambda^2)J\alpha=0$. 又因 J 为可逆矩阵，且 $\alpha\neq 0$，从而 $\lambda^2=-1$，所以 $\lambda=i$ 或 $-i$.

定理 4　行反正交矩阵的迹等于零.

证明　根据定理 3 和引理 2 可知 $\mathrm{tr}(A)=0$，即：行反正交矩阵的迹等于零.

定理 5　设 $A\in R^{n\times n}$ 是行反正交矩阵，则

（1）JA,AJ,A^T 都仍是行反正交矩阵；

（2）A^{-1} 是行反正交矩阵；

（3）A^* 是行反正交矩阵；

（4）$A_i\in R^{n\times n}$ 为 n 阶行反正交矩阵，且 A_i 两两可交换，（$i=1,2,\cdots,m$，m 为奇数），则 $A_1A_2A_3\cdots A_m$，$(A_1A_2\cdots A_m)^R$，$(A_1A_2\cdots A_m)^C$ 都是行反正交矩阵；

（5）A^m 是行反正交矩阵（m 为奇数时），A^m 是行正交矩阵（m 为偶数时）.

证明　因 A 是 n 阶行反正交矩阵，则有 $A^RA=AA^R=-J$，结合引理 1 来证明以上结论：

（1）$(JA)^R(JA)=(A^R)^RA^R=AA^R=-J$，$(JA)(JA)^R=A^R(A^R)^R=A^RA=-J$，从而 $(JA)^R(JA)=(JA)(JA)^R=-J$，所以 JA 仍为行反正交矩阵；

同样的方法可以证明：AJ 也是行反正交矩阵；

由引理 1 和定理 2 的（2）可得

$$(A^{\mathrm{T}})^{R}A^{\mathrm{T}} = (A^{C})^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} = (AA^{C})^{\mathrm{T}} = (AA^{R})^{\mathrm{T}} = -J$$

$$A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{R} = A^{\mathrm{T}}(A^{C})^{\mathrm{T}} = (A^{C}A)^{\mathrm{T}} = (A^{R}A)^{\mathrm{T}} = -J$$

所以$(A^{\mathrm{T}})^{R}A^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}(A^{\mathrm{T}})^{R} = -J$,即$A^{\mathrm{T}}$也是行反正交矩阵.

(2) 由定理2的(4)可知$(A^{-1})^{R} = (A^{R})^{-1}$,所以

$$(A^{-1})^{R}A^{-1} = (A^{R})^{-1}A^{-1} = (AA^{R})^{-1} = -J\ ,A^{-1}(A^{-1})^{R} = A^{-1}(A^{R})^{-1} = (A^{R}A)^{-1} = -J$$

$(A^{-1})^{R}A^{-1} = A^{-1}(A^{-1})^{R} = -J$,即:$A^{-1}$是行反正交矩阵.

(3) 结合引理1,引理3和定理2的(5)可知$A^{-1} = -A, A^{*} = |A|A^{-1} = -|A|A, (A^{*})^{R}A^{*} = (-|A|A)^{R}(-|A|A) = |A|^{2}A^{R}A = -J, A^{*}(A^{*})^{R} = (-|A|A)(-|A|A)^{R} = |A|^{2}AA^{R} = -J$,从而$(A^{*})^{R}A^{*} = A^{*}(A^{*})^{R} = -J$,即 :$A^{*}$是行反正交矩阵.

(4) 因$A_i \in R^{n\times n}$为n阶行反正交矩阵,且A_i两两可交换,所以

$$\begin{aligned}
&(A_1A_2A_3\cdots A_m)^{R}(A_1A_2A_3\cdots A_m) = A_1^{R}A_2A_3\cdots A_mA_1A_2A_3\cdots A_m = \\
&A_1^{R}A_2A_3\cdots A_1A_mA_2A_3\cdots A_m = \cdots = (A_1^{R}A_1)(A_2A_2)(A_3A_3)\cdots(A_mA_m) = \\
&-(JA_2A_2)(A_3A_3)\cdots(A_mA_m) = -(A_2^{R}A_2)(A_3A_3)\cdots(A_mA_m) = \\
&(-1)^{2}(A_3^{R}A_3)\cdots(A_mA_m) = \cdots = (-1)^{m-1}(A_m^{R}A_m) = (-1)^{m}J \\
&(A_1A_2\cdots A_m)(A_1A_2\cdots A_m)^{R} = A_1A_2\cdots A_mA_1^{R}A_2\cdots A_m = \cdots = (A_1A_1^{R})(A_2A_2)\cdots(A_mA_m) = \\
&-(JA_2A_2)\cdots(A_mA_m) = -(A_2^{R}A_2)\cdots(A_mA_m) = \cdots = (-1)^{m-1}(A_m^{R}A_m) = (-1)^{m}J
\end{aligned}$$

又因m为奇数,从而$(A_1A_2\cdots A_m)^{R}(A_1A_2\cdots A_m) = (A_1A_2\cdots A_m)(A_1A_2\cdots A_m)^{R} = (-1)^{m}J = -J$,所以,$A_1A_2\cdots A_m$是行反正交矩阵;同理可证$(A_1A_2\cdots A_m)^{R}$,$(A_1A_2\cdots A_m)^{C}$也都是行反正交矩阵.

推论3 $A_i \in R^{n\times n}$为n阶行反正交矩阵,且A_i两两可交换,$(i = 1,2,\cdots,m,m$为偶数)则$A_1A_2A_3\cdots A_m$,$(A_1A_2\cdots A_m)^{R}$,$(A_1A_2\cdots A_m)^{C}$都是行正交矩阵.

(5) 由(4)的结论很容易得到.

3 结束语

研究了行反正交矩阵的行列式、特征值、可逆性、迹等问题,得到行反正交矩阵的一些新的性质,它们是文献[13-17]中相关性质的概括、改进和推广,这对矩阵的理论研究有重要的意义.

参考文献:

[1] 刘志明. 关于正交矩阵性质的讨论[J]. 重庆师范学院学报:自然科学版,2000,17(9):162-164
[2] 刘丽萍. 次正交矩阵及其性质[J]. 山西财经大学学报,2000,22(9):205
[3] 陈琳. 亚次正交矩阵及性质[J]. 周口师范学院学报,2004,21(5):28-30
[4] 郭伟. 广义次对称矩阵及广义次正交矩阵[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2000,25(1):18-22
[5] 戴立辉,王泽文,刘龙章. 正交矩阵的若干性质[J]. 华东地质学院学报,2002,25(13):267-267
[6] 刘玉,蔡乌芳. K-次正交矩阵及其性质[J]. 南通大学学报:自然科学版,2009,8(1):72-75
[7] 许永平,石小平. 正交矩阵的充要条件与O正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报:自然科学版,2005,29(2):54-56
[8] 余壁芬. 复方阵的次正定性[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2001,24(5):447-450
[9] 宋乾坤. 复正定矩阵的一些性质[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,1997,20(3):44-48
[10] 詹仕林. 复正定矩阵与复矩阵的和的行列式不等式[J]. 四川师范大学学报:自然科学版,2003,26(3):250-252

[11] 袁晖坪.行(列) 对称矩阵的 Schur 分解和正规阵分解[J].山东大学学报:理科版,2007,42(10):123-126

[12] 袁晖坪.行(列) 对称矩阵的奇异值分解[J].中北大学学报:自然科学版,2009,30(2):100-104

[13] 贾书伟,何承源.行(列)转置矩阵的性质[J].内江师范学院学报:自然科学版,2011,26(2):14-16

[14] 郭华,李庆玉. 关于行对称矩阵[J].四川师范大学学报:自然科学版,2008,31(4):390-392

[15] 何承源,涂淑恒.实矩阵的行正定性[J].西华大学学报:自然科学版,2010,29(5):49-50

[16] 贾书伟,何承源.行正交矩阵的一些性质[J].西南民族大学学报:自然科学版,2011,37(1):71-74

[17] 贾书伟.K-行正交矩阵的几点性质[J].河南城建学院学报:自然科学版,2011,20(1):66-67

[18] 钱吉林.高等代数题解精粹 [M].北京:中央民族大学出版社,2005

[19] 黄正达,李方等.高等代数(上册)[M].杭州:浙江大学出版社,2008

Some Properties of Contrary Orthogonal Matrix

JIA Shu-wei, HE Cheng-yuan

(School of Mathematics and Computer, Xihua University, Chengdu 610039, China)

Abstract: This paper gives the concept of contrary orthogonal matrix, discusses determinant, reversibility, trace, eigenvalue and so on, and obtains determinant, inverse matrix, eigenvalue and trace of contrary orthogonal matrix, meanwhile, draws the conclusion that contrary orthogonal matrix is a symmetric matrix of ranks, that itself, its row transposed matrix and its column transposed matrix are invertible, that the transposed matrix of contrary orthogonal matrix and its row transposed matrix and its column transposed matrix are also contrary orthogonal matrix, that inverse matrix of row transposed matrix of contrary orthogonal matrix is equal to its row transposition of its inverse matrix, that the inverse matrix of its column transposed matrix is equal to its column transposition of its inverse matrix, that the transition of its row transposed matrix is equal to the row transposition of its transposed matrix and that the transposition of its column transposed matrix is equal to the column transposition of its transposed matrix.

Key words: orthogonal matrix; contrary orthogonal matrix; row (column) symmetric matrix

责任编辑:代小红