

文章编号:1672-058X(2012)02-0010-03

# 一种变形 Kouch 曲线及其算法\*

敖 香

(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

**摘 要:**根据 Kouch 曲线的定义和性质,构造了一种变形 Kouch 曲线,并给出了新 Kouch 曲线的一种算法.

**关键词:**Kouch 曲线;变形;算法

**中图分类号:**O174.12

**文献标志码:**A

分形(fractal)这个词是 Mandelbort 在 20 世纪 70 年代为了表征复杂图形和复杂过程首先引入自然科学领域的,它的原意是不规则的,支离破碎的物体.分形可分为规则分形和不规则分形.如 Cantor 集、Kouch 曲线<sup>[1,2]</sup>和 Sierpinski 垫片<sup>[3]</sup>等都属于规则的分形图形,它们具有严格的自相似性.由于计算技术和计算机图形学的进展,分形几何得到了迅速的发展,它在图像数据压缩、分形生成、混沌动力系统及金融分析等方面有着广泛的应用.

## 1 Kouch 曲线

### 1.1 Kouch 曲线的定义<sup>[4,5]</sup>

在  $R^2$  上取单位线段,记作  $K_0$ .把  $K_0$  三等分,在中间一段上向上作正三角形并去掉底边的内部,得到一条由 4 个长度为  $\frac{1}{3}$  的线段构成的折线,记作  $K_1$ .对  $K_1$  的每一线段重复上述过程(作三角形时方向均向上),得到一条由  $4^2$  个长度为  $\frac{1}{3^2}$  的线段构成的折线,记作  $K_2$ ;这样的过程无限进行下去,得到折线序列  $K_0, K_1, \dots, K_n$ ,易见,在 Hausdorff 度量下,存在极限  $K_i \xrightarrow{H} K, K$  即是 Kouch 曲线(图 1).

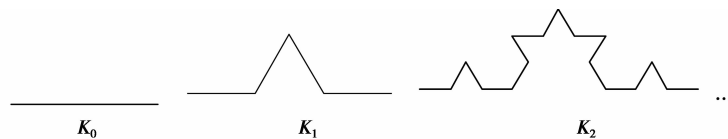


图 1 Kouch 曲线

### 1.2 Kouch 曲线的性质<sup>[6]</sup>

(i) 自相似性.曲线  $K$  具有局部与整体的相似性,它由 4 个与  $K$  相似的部分组成,其相似因子为  $\frac{1}{4}$ ,而

收稿日期:2011-05-06;修回日期:2011-06-02.

\* 基金项目:重庆市教委科学研究项目(05JWSK054).

作者简介:敖香(1987-),女,四川遂宁人,硕士研究生,从事拓扑动力系统研究.

每部分又由4个更小的但仍与 $K$ 相似的部分组成,其相似因子为 $\frac{1}{4^2}, \dots$ ,上述的相似性称为自相似性,即局部经过相似放大(沿各方向放大率相同)后与整体重合.

(ii) 曲线 $K$ 具有“细结构”. 不管取多么小的尺度,60度的夹角仍然出现,只是边长相应减少,这一事实表明,曲线 $K$ 的复杂性不随尺度的减小而消失.

(iii) 曲线 $K$ 难以用经典方法刻划. 从整体上看,它既不是满足某些简单几何条件的点的轨迹,亦不能作为任一简单方程解的集合. 从局部看,它不能通过切线来描述.

(iv) 曲线 $K$ 的长度为无穷大,而面积为零,从而不能用通常的测度来度量它的“大小”.

(v) 曲线 $K$ 可由简单的递归方式生成.

## 2 构造一种变形 Kouch 曲线

设 $K_0$ 为一单位线段,分成4等分,将线段中间的2个 $\frac{1}{4}$ 分别用长为 $K_0$ 的 $\frac{1}{4}$ 长度的正方形的3条边替代,形成具有9个结点的图形作为生成元(如图2,其中 $P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5 = P_5P_6 = P_6P_7 = P_7P_8 = P_8P_9 = \frac{1}{4}$ ),在生成元中每一条线段用同样的方法形成新的图形.

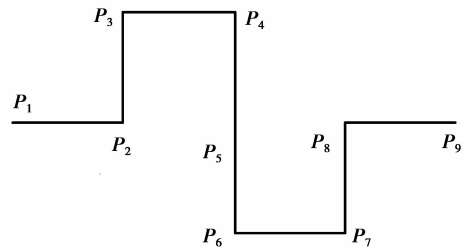


图2 生成元

## 3 算法分析

考虑由线段(2个点)产生的图2(9个点)的过程. 设 $P_1$ 和 $P_9$ 分别为两个端点,在线段中间一次插入7个点 $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8$ ,产生第一次迭代的图形(图2). 易知, $P_2$ 位于 $P_1$ 点右端 $\frac{1}{4}$ 处; $P_5$ 位于 $P_1$ 点右端 $\frac{1}{2}$ 处; $P_8$ 位于 $P_1$ 点右端 $\frac{3}{4}$ 处; $P_3$ 位置可看成是由 $P_5$ 逆时针绕 $P_2$ 90°得到,故可处理为向量 $P_2P_5$ 经正交变换 $A$ 得到向量 $P_2P_3$ ;  $P_4$ 点位置可看成是由 $P_2$ 顺时针绕 $P_5$ 90°得到,故可处理为向量 $P_5P_2$ 经正交变换 $B$ 得到向量 $P_5P_4$ ;  $P_6$ 点位置可看成是由 $P_2$ 逆时针绕 $P_5$ 90°得到,故可处理为向量 $P_5P_2$ 经正交变换 $A$ 得到向量 $P_5P_6$ ;  $P_7$ 点位置可看成是由 $P_5$ 逆时针绕 $P_8$ 90°得到,故可处理为向量 $P_8P_5$ 经正交变换 $A$ 得到向量 $P_8P_7$ . 具体算法如下:

(1)  $P_2 = P_1 + d$ ; (2)  $P_3 = P_1 + d + 1 * d * A^T$ ; (3)  $P_4 = P_1 + 2d + 1 * d * B^T$ ; (4)  $P_5 = P_1 + 2d$ ; (5)  $P_6 = P_1 + 2d + 1 * d * A^T$ ; (6)  $P_7 = P_1 + 3d + 1 * d * A^T$ ; (7)  $P_8 = P_1 + 3d$ .

其中,  $d = \frac{1}{4} (P_9 - P_1)$ ;  $A, B$  为正交矩阵,  $A = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}$ , 即  $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} \cos(-90^\circ) & -\sin(-90^\circ) \\ \sin(-90^\circ) & \cos(-90^\circ) \end{bmatrix}$ , 即  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

算法根据 $P_1$ 和 $P_9$ 点的坐标,产生图2中的9个结点的坐标,组成 $9 \times 2$ 矩阵. 矩阵第1行为 $P_1$ 的坐标,第2行为 $P_2$ 的坐标, ..., 第9行为 $P_9$ 的坐标;矩阵的第1列元素分别为9个结点的 $X$ 坐标,第2列元素分别为9个结点的 $Y$ 坐标.

根据曲线的形成过程进一步考虑其结点数变化规律,若设第  $K$  次迭代的结点数为  $n_K$ ,第  $K+1$  次迭代的结点数为  $n_{K+1}$ ,则可用分形递归<sup>[7,8]</sup>的方法推断出  $n_{K+1} = 8n_K - 7$ . 另外,根据以上算法,可用计算机绘制出此种变形 Kouch 曲线(图 3).

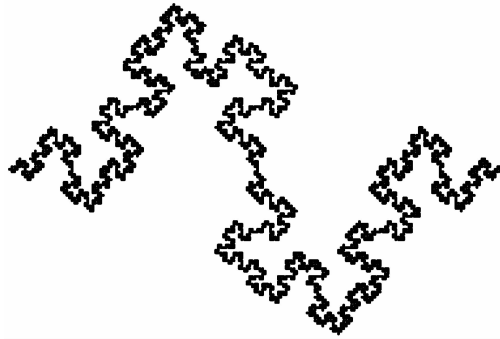


图 3  $n = 5$  的新 Kouch 曲线

#### 参考文献:

- [1] 周作领. 自相似集的 Hausdorff 测度—Kouch 曲线[J]. 中国科学(A 辑), 1998, 28(2): 103-107
- [2] 周作领. Kouch 曲线和 Sierpinski 垫片的 Hausdorff 测度[J]. 自然科学进展, 1997, 7(4): 405-409
- [3] 周作领, 乐军. 分形几何和动力系统中的一些问题[J]. 工程数学学报, 2006, 23(5): 761-764
- [4] 孙霞, 吴自勤, 黄响. 分形原来及其应用[M]. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2003
- [5] 文志英. 分形几何的数学基础[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2000
- [6] 文志英, 井竹君. 分形几何和分维数简介[J]. 数学的认识与实践, 1995(4): 20-34
- [7] 姚雪峰, 秦文虎. 基于分形递归算法的树木真实感绘制[J]. 计算机工程与设计, 2007, 28(4): 888-892
- [8] 程学珍, 曹茂永, 徐小平. 基于分形的自然景物描述方法比较研究[J]. 计算机工程与设计, 2008, 29(2): 389-391

## A Kind of Deformation Kouch Curve and Its Algorithm

AO Xiang

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047, China)

**Abstract:** According to the definition and properties of Kouch curve, this paper presents a new kind of deformation Kouch curve and gives a new algorithm for Kouch curve.

**Key words:** Kouch curve; deformation; algorithm

责任编辑:李翠薇