文章编号:1672 -058X(2012)02 -0005 -05

一类具有功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析*

王倩倩,李宝麟
(西北师范大学 数学与信息科学学院,兰州 730070)

摘 要:研究了一类具有功能性反应函数$\frac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}$捕食者-食饵模型,应用微分方程定性理论,讨论了该系统非负平衡点的性态以及正初始条件下解的有界性,得出了系统在参数变化范围内极限环的存在性与唯一性结论.

关键词:捕食者-食饵系统;功能性反应;平衡点;极限环
中图分类号:O175 **文献标志码:** A

1 引 言

关于具有功能性反应的捕食者-食饵系统的研究,目前已有不少研究结果. 文献[1]研究了系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-bx^\alpha-cx^{2\alpha})-y\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(-d+e\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}\right)\end{cases}$$

文献[2]研究了系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-bx^\alpha)-y\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha+\omega x^{2\alpha}}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(-d+e\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha+\omega x^{2\alpha}}\right)\end{cases}$$

均获得了有意义的结果. 在此基础上考虑如下捕食者-食饵系统

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x(a-bx^\alpha)-y\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y\left(-d+e\dfrac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}\right)\end{cases}\tag{1}$$

其中$x(t)$,$y(t)$分别为t时刻食饵与捕食者种群的密度;a,b,d,e,β均为具有生态意义的正常数且$\frac{1}{2}\leqslant\alpha<1$;

收稿日期:2011 -04 -10;**修回日期:**2011 -05 -10.
* **基金项目:**国家自然科学基金项目(11061031);甘肃省-555-创新人才工程资助项目;西北师范大学科技创新工程项目.
作者简介:王倩倩(1984-),女,山西屯留人,硕士研究生,从事应用微分方程研究.

$a-bx^{\alpha}$为食饵种群的密度制约函数;$\dfrac{x^{\alpha}}{1+\beta x^{\alpha}}$为功能性反应函数. 设 $D=\{(x,y)\mid x>0,y>0\}$有实际生态学意义,只需在$\overline{D}$上研究系统(1).

2 预备知识

为了讨论方便,作变换:$u=x^{\alpha},v=y,(1+\beta x^{\alpha})\mathrm{d}\tau=\mathrm{d}t$,仍记 u,v,τ 为 x,y,t,则式(1)化为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x(-a_1x^2+a_2x+a)-\alpha x^{2-\frac{1}{\alpha}}y\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=y(b_1x-d)\end{cases}\tag{2}$$

其中 $a_1=b\beta,a_2=a\beta-b,b_1=e-d\beta,a_1>0$.

记$f(x)=x^{\frac{1}{\alpha}-1}(-a_1x^2+a_2x+a),g(x)=b_1x-d$. 故式(2)可写为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\alpha x^{2-\frac{1}{\alpha}}(f(x)-y)=P(x,y)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yg(x)=Q(x,y)\end{cases}\tag{3}$$

记 $x_0=\dfrac{d}{b_1},y_0=f(x_0)=x_0^{\frac{1}{\alpha}-1}(-a_1x_0^2+a_2x_0+a),x_1=\dfrac{a_2+\sqrt{a_2^2+4a_1a}}{2a_1}$为方程 $a_1x^2-a_2x-a=0$ 的唯一正实根.

引理 1.1 当 $0<x<x_1$ 时,有 $f(x)>0$;当 $x>x_1$ 时,有 $f(x)<0$.

引理 1.2 当 $b_1<0$ 或 $x_0>x_1$ 时,式(3)在$\overline{D}$上有两个平衡点:$O(0,0),R_1(x_1,0)$;当 $b_1>0$ 且 $x_0<x_1$ 时,式(3)在$\overline{D}$上有3个平衡点:$O(0,0),R_1(x_1,0),R_2(x_0,y_0)$.

引理 1.3 在区域$\overline{D}$上,$O(0,0)$为式(3)不稳定的鞍点.

引理 1.4 (Bendixson-Dulac 判别法)若在单连通域$\overline{D}$内存在函数 $B(x,y)\in C^1(\overline{D})$,使$\dfrac{\partial(BP)}{\partial x}+\dfrac{\partial(BQ)}{\partial y}\geqslant 0(\leqslant 0),(x,y)\in\overline{D}$,且不存在$\overline{D}$的任一子区域内恒为零,则式(3)不存在全部位于$\overline{D}$内的闭轨线和具有有限个奇点的奇异闭轨线. 函数 $B(x,y)$常称为 Dulac 函数.

引理 1.5 (Bendixson 环域定理)设由闭曲线 l_1 与 l_2 所构成的环域$\overline{D}$内及其边界上不含奇点. 若平面自治系统凡与$\overline{D}$的边界相交的正半轨均穿入(出)环域$\overline{D}$,则在$\overline{D}$内至少存在此系统的一个内稳定(不稳定)的极限环和一个外稳定(不稳定)的极限环,可能二者重合为一.

注 环域$\overline{D}$的内境界线可以缩小成一个不稳定(稳定)的奇点. 因为这时在奇点的足够小邻域内作闭曲线 l_2,必可使系统的正半轨穿入(出)环域$\overline{D}$.

式(3)对应的线性近似系统的雅可比矩阵为

$$J_{(4)}=\begin{pmatrix}(2\alpha-1)x^{1-\frac{1}{\alpha}}(f(x)-y)+\alpha x^{2-\frac{1}{\alpha}}f'(x) & -\alpha x^{2-\frac{1}{\alpha}}\\ yg'(x) & g(x)\end{pmatrix}$$

3 主要结果

定理 2.1 系统(1)的一切正初始条件的解有界.

证明　当 $x(0)$，$y(0)$ 为正时，显然对所有的 $t\geqslant 0$，有 $x(t)$，$y(t)$ 也是正的. 记 $\varphi(x)=a-bx^{\alpha}$，则 $\varphi(0)=a>0$；存在常数 $K=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$，使得 $\varphi(K)=0$ 且当 $x\neq K$ 时，$(x-K)\varphi(x)<0$.

下面分两种情况证明 $x(t)$ 有界.

（i）若 $x(0)<K$，则对所有的 $t\geqslant 0$，有 $x(t)<K$. 否则若存在 $t_1>0$ 有 $x(t_1)=K$. 设 t_1 是使 $x(t)=K$ 的 t 中最小的一个，则在 $0\leqslant t<t_1$ 上有 $x(t)<K$. 因为

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_1}=-y\frac{x^{\alpha}}{1+\beta x^{\alpha}}<0$$

故存在 $\sigma>0$，使得在 $(t_1-\sigma,t_1+\sigma)$ 上的 $x(t)$ 严格单调递减. 恰当选取 σ 使 $t_1-\sigma\geqslant 0$，当 $t\in(t_1-\sigma,t_1)$ 时，有 $x(t)>x(t_1)=K$ 与 $x(t)<K$ 矛盾，结论得证.

（ii）若 $x(0)\geqslant K$，由式(1)及所给条件可知，或者 $x(t)$ 减少到某一常数 $x\geqslant K$，或者存在 $t_2>0$，使 $x(t_2)<K$. 如同(i)中 $x(0)<K$ 的理由可知当 $t\geqslant t_2$ 时，有 $x(t)<K$. 故对所有 $t\geqslant 0$，都有 $x(t)$ 有界.

下证 $y(t)$ 有界. 有所给条件知，

$$e\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=ex\varphi(x)-yd=(ex\varphi(x)+\mathrm{d}ex)-\mathrm{d}(ex+y)$$

因为 $x(t)$ 有界，故存在 $\eta>0$ 使得 $ex\varphi(x)+\mathrm{d}ex\leqslant\eta$，所以

$$e\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=(ex+y)'\leqslant\eta-\mathrm{d}(ex+y),$$

即 $ex+y\leqslant Ae^{-td}+\dfrac{\eta}{d}(A=ex(0)+y(0)-\dfrac{\eta}{d})$，故 $y(t)$ 有界，定理得证.

定理 2.2　（i）当 $b_1<0$ 或 $x_0>x_1$ 时，$R_1(x_1,0)$ 为式(3)稳定的结点，当 $b_1>0$ 且 $x_0<x_1$ 时，$R_1(x_1,0)$ 为式(3)不稳定的鞍点；（ii）在区域 $\overline{D}$ 上，当 $f'(x_0)<0$ 时，R_2 为渐近稳定的焦点（或结点），当 $f'(x_0)>0$ 时，R_2 为不稳定的焦点（或结点）.

证明　（i）对于 R_1，则：

$$J_{(R_1)}=\begin{pmatrix}\alpha x_1^{2-\frac{1}{\alpha}}f'(x_1) & -\alpha x_1^{2-\frac{1}{\alpha}}\\ 0 & g(x_1)\end{pmatrix}$$

$J_{(R_1)}$ 的特征值为 $\lambda_1=\alpha x_1^{2-\frac{1}{\alpha}}f'(x_1)$，$\lambda_2=g(x_1)$. 因为 $f'(x)=\left(\dfrac{1}{\alpha}-1\right)x^{\frac{1}{\alpha}-2}(-a_1x^2+a_2x+a)+x^{\frac{1}{\alpha}-1}(-2a_1x+a_2)$，$f'(x_1)=x_1^{\frac{1}{\alpha}-1}(-2a_1x_1+a_2)=-x_1^{\frac{1}{\alpha}-1}\sqrt{a_2^2+4a_1a}$，所以 $\lambda_1<0$. 当 $b_1<0$ 或 $x_0>x_1$ 时，$g(x_1)<0$，此时 $\lambda_2<0$；当 $b_1>0$ 且 $x_0<x_1$ 时，$g(x_1)>0$，此时 $\lambda_2>0$. 故(i)得证.

（ii）对于 R_2，则：

$$J_{(R_2)}=\begin{pmatrix}\alpha x_0^{2-\frac{1}{\alpha}}f'(x_0) & -\alpha x_0^{2-\frac{1}{\alpha}}\\ y_0g'(x_0) & 0\end{pmatrix}$$

其特征方程为

$$\lambda^2-\alpha x_0^{2-\frac{1}{\alpha}}f'(x_0)\lambda+\alpha x_0^{2-\frac{1}{\alpha}}g'(x_0)y_0=0$$

由引理 1.2 知，当 $b_1>0$ 且 $x_0<x_1$ 时，$R_2(x_0,y_0)$ 为式(3)的一个平衡点，又由引理 1.1 知，此时 $f(x_0)>0$ 即 $y_0>0$，$g'(x_0)=b_1>0$，所以 $\alpha x_0^{2-\frac{1}{\alpha}}g'(x_0)y_0>0$. 由 Routh-Hurwitz 条件知，当 $f'(x_0)<0$ 时，R_2 为渐近稳定的

焦点(或结点),当$f'(x_0)>0$时,R_2为不稳定的焦点(或结点).故(ii)得证.

定理2.3 当$(1+\alpha)a_1d^2-a_2b_1d-b_1^2a(1-\alpha)\geqslant 0$时,式(3)在$\overline{D}$内不存在极限环.

证明 取Dulac函数$B(x,y)=\dfrac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-2}y^{r-1}$,其中$r$为待定常数.

$$\frac{\partial(BP)}{\partial x}+\frac{\partial(BQ)}{\partial y}=x^{\frac{1}{\alpha}-2}y^{r-1}\left[-\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)a_1x^2+\frac{1}{\alpha}(a_2+rb_1)x+\frac{a}{\alpha}-\frac{rd}{\alpha}-a\right]$$

若使$\dfrac{\partial(BP)}{\partial x}+\dfrac{\partial(BQ)}{\partial y}$常号,只需

$$G(r)=\left[\frac{1}{\alpha}(a_2+rb_1)\right]^2+4\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)\left(\frac{a}{\alpha}-\frac{rd}{\alpha}-a\right)a_1=$$

$$\frac{1}{\alpha^2}\{b_1^2r^2+[2a_2b_1-4(1+\alpha)a_1d]r+4(1-\alpha^2)a_1a+a_2^2\}\leqslant 0 \tag{4}$$

这应要求$G(r)=0$至少有一实根,即要求$[2a_2b_1-4(1+\alpha)a_1d]^2-4b_1^2[4(1-\alpha^2)a_1a+a_2^2]\geqslant 0$,化简得$(1+\alpha)a_1d^2-a_2b_1d-b_1^2a(1-\alpha)\geqslant 0$,此时$G(r)=0$或有两实根$r_1<r_2$,或有重根$r_1=r_2$.取$r_0$使$r_1\leqslant r_0\leqslant r_2$,则保证了式(4)成立.这样,$(1+\alpha)a_1d^2-a_2b_1d-b_1^2a(1-\alpha)\geqslant 0$时,选取Dulac函数$B(x,y)=\dfrac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-2}y^{r_0-1}$便可在$\overline{D}$内使$\dfrac{\partial(BP)}{\partial x}+\dfrac{\partial(BQ)}{\partial y}\leqslant 0$,且不在任一子区域内恒为零.根据引理1.4可知式(3)在$\overline{D}$内不存在极限环.

定理2.4 当$b_1>0,x_0<x_1,f'(x_0)>0$时,式(3)在$\overline{D}$内存在唯一的极限环.

证明 极限环的存在性.根据引理1.5的注,只需构造外境界线.过点$R_1(x_1,0)$作直线$L_1=x-x_1=0$,则:

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_1}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}=\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{x=x_1}=-\alpha x_1^{2-\frac{1}{\alpha}}y<0$$

故当轨线与$x=x_1$相遇时,均从直线$x=x_1$的右方穿入左方.再作直线$L_2=y+b_1x^{\frac{1}{\alpha}}-k=0$,则:

$$\left.\frac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}=-\mathrm{d}k+\mathrm{d}b_1x^{\frac{1}{\alpha}}+b_1x^{\frac{1}{\alpha}}(-a_1x^2+a_2x+a)$$

当$0<x<x_1,y>0,k$远大于0时,$\left.\dfrac{\mathrm{d}L_2}{\mathrm{d}t}\right|_{(3)}<0$.故轨线与直线$L_2=0$相遇时均从其右上方穿入左下方.直线$x=0$与$y=0$都是式(3)的轨线.这样,直线$L_1,L_2,x$轴和$y$轴围成区域$\overline{D}$的外境界线,其内部奇点$R_2(x_0,y_0)$为不稳定的.由定理2.2知其上除鞍点外无其他类型的奇点,所以式(3)在$\overline{D}$内至少存在一个极限环.

下证唯一性.作变换$u=x-x_0,y=y_0e^v$(这里的e为自然对数底),$\mathrm{d}t=-\dfrac{1}{\alpha}x^{\frac{1}{\alpha}-2}\mathrm{d}\tau$,则式(3)化为下述等价的Liénard系统:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau}=\varphi(v)-F(u)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\tau}=-g(u)\end{cases} \tag{5}$$

其中$\varphi(v)=y_0(e^v-1),g(u)=\dfrac{b_1}{\alpha}u(u+x_0)^{\frac{1}{\alpha}-2},F(u)=-a_1(x_0+u)^{\frac{1}{\alpha}+1}+a_2(x_0+u)^{\frac{1}{\alpha}}+a(x_0+u)^{\frac{1}{\alpha}-1}-y_0$.

函数$F(u),g(u)$和$\varphi(v)$分别在$u=0,v=0$的邻域内是解析的且有下述性质:

(1) $\varphi(0)=0, v\varphi(v)>0, \varphi'(v)=y_0e^v>0, F'(0)=f'(x_0)=-a_1\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)x_0^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{a_2}{\alpha}x_0^{\frac{1}{\alpha}-1}+a\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)x_0^{\frac{1}{\alpha}-2}$;

(2) 当 $u>-x_0$ 且 $u\neq 0$ 时, $ug(u)>0$;

(3) $\frac{b_1}{\alpha}\frac{F'(u)}{g(u)}=-a_1\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)(2x_0+u)+\frac{a_2}{\alpha}+\frac{x_0^{2-\frac{1}{\alpha}}f'(x_0)}{u}, \left(\frac{b_1}{\alpha}\frac{F'(u)}{g(u)}\right)'=-a_1\left(\frac{1}{\alpha}+1\right)-\frac{x_0^{2-\frac{1}{\alpha}}f'(x_0)}{u^2}<0.$

由文献[6]中定理知,式(5)在 $-x_0<u<+\infty$, $-\infty<v<+\infty$ 上围绕原点至多存在一个极限环,相应的式(3)在$\overline{D}$内围绕 $R_2(x_0, y_0)$ 至多存在一个极限环,故定理得证.

参考文献:

[1] 王政. 具非线性饱和功能反应的捕食者 - 食饵系统的定性分析[J]. 生物数学学报,2007,22(2):215-218

[2] 程雷虎,李自珍,苏敏. 具有非线性功能性反应函数的捕食者-食饵系统稳定性分析[J]. 兰州大学学报,2009,45(1):95-98

[3] 马知恩,周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京:科学出版社,2001

[4] 芦雪娟. 具有常数收获率的捕食与被捕食系统的定性分析[D]. 哈尔滨理工大学,2006

[5] 陈兰荪. 数学生态学模型与研究方法[M]. 北京:科学出版社,1988

[6] COPPEL W. Some quadratic system with at most one limit cycle [J]. Dynamics Reported,1989(2):61-88

Qualitative Analysis of a Class of Predator-prey System with Functional Response

WANG Qian-qian, LI Bao-lin

(College of Mathematics and Information Science, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: A class of predator-prey model with the functional response $\frac{x^\alpha}{1+\beta x^\alpha}$ was studied. The properties of non-negative equilibrium point and the boundedness of its solutions under positive initial conditions in this system are discussed by using qualitative theory of differential equation, an existence and uniqueness of limit cycle within the change range of the parameters are obtained in the system. .

Keywords: predator-prey system; functional response; equilibrium point; limit cycle

责任编辑:代小红