文章编号:1672-058X(2012)01-0016-03

关于 KT-伪Ⅱ型不变凸性的一个注记*

龙莆均, 皮巧丽, 赵克全
(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘 要: 在 KT-伪Ⅱ型不变凸性下研究了一类非可微多目标规划的 Mond-Weir 对偶模型的限制逆对偶定理;进一步考虑了该类问题的混合对偶模型的弱对偶定理、强对偶定理、逆对偶定理.

关键词: KT-伪Ⅱ型不变凸性;Mond-Weir 对偶;混合对偶;KT 向量临界点

中图分类号: O221.2;O172.2 **文献标志码:** A

近年来,许多学者在各类广义凸性条件下研究了数学规划问题的一些最优性必要和充分性条件以及对偶结果[1-6]. 特别地,Manuel Arana-Jiménez 等人在文献[6]中引入了一类新的非可微广义凸函数—KT-伪Ⅱ不变凸,刻画一类多目标规划问题的有效解,建立了 KT-伪Ⅱ不变凸性条件下的 Mond-Weir 对偶模型,并证明了该类多目标规划问题的 Mond-Weir 对偶模型的弱对偶定理、强对偶定理和逆对偶定理.

此处在文献[6]的基础上,进一步研究了 KT-伪Ⅱ型不变凸性条件下一类不可微多目标规划问题的 Mond-Weir 对偶模型的限制逆对偶定理. 此外,在 KT-伪Ⅱ型不变凸性下研究了不可微多目标规划问题的混合对偶模型的弱对偶定理、强对偶定理和逆对偶定理.

1 预备知识

考虑如下的不可微的带不等式约束的 KT-伪Ⅱ型不变凸多目标规划:

$$(\mathrm{CMP}) \qquad \min f(x)$$
$$\text{s.t.} \quad g(x) \leqq 0, x \in R^n$$

其中,$f=(f_1,\cdots,f_p):R^n\to R^p$,$g=(g_1,\cdots,g_m):R^n\to R^m$ 为局部 Lipschitz 函数. 记 $K=\{x\in X:g_i(x)\leqq 0\}$ 为可行域,$I=\{1,2,\cdots,p\}$,$j\in J=\{1,2,\cdots,m\}$,$J(x)=\{j\in J:g_j(x)=0,\forall x\in R^n\}$.

为了方便起见,引入以下几个符号:$x=(x_1,\cdots,x_n)$,$y=(y_1,\cdots,y_n)\in R^n$;$x=y\Leftrightarrow x_i=y_i$,$\forall i=1,2,\cdots,n$;$x<y\Leftrightarrow x_i<y_i$,$\forall i=1,2,\cdots,n$;$x\leqq y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i$,$\forall i=1,2,\cdots,n$;$x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i$,$\forall i=1,2,\cdots,n$. 存在一个 j 使得 $x_i<y_i$.

$f:X\to R$ 称为在 $x\in X$ 是 Lipschitz 的,如果存在 $k>0$,有 $|f(y)-f(z)|\leqslant k\|y-z\|$,$\forall x,y\in N(x_0)$.

$f:X\to R$ 称为 Lipschitz 的,如果在任意 $x\in X$ 是 Lipschitz 的.

定义 1[7] $f:X\to R$ 在 $x\in X$ 是局部 Lipschitz 的,f 在 $x\in X$ 处沿方向 $v\in R^n$ 的广义方向导数定义为 $f^\circ(x;v)=\limsup\limits_{y\to x,\lambda\downarrow 0}\dfrac{f(y+\lambda v)-f(y)}{\lambda}$.

定义 2[7] $f:R^n\to R$ 在 $x\in X$ 点的 Clarke 广义次微分定义为 $\partial f(x)=\{\xi\in R^n:f^\circ(x;v)\geqslant[\xi,v],\forall v\in R^n\}$.

收稿日期:2011-03-07;修回日期:2011-06-09.
* 基金项目:重庆市教委研究项目(KJ100608);重庆市自然科学基金项目(CSTC2010BB2090).

作者简介:龙莆均(1987-),男,四川南充人,硕士研究生,从事非光滑优化研究.

局部 Lipschitz 函数 $f:R^n \to R^p$ 在 $x \in R^n$ 点的 Clarke 广义次微分定义为 $\partial f(x) = \partial f_1(x) \times \cdots \times \partial f_p(x)$.

定义 3[6]　CMP 的可行解称为 Kuhn-Tucker 向量临界点(KTVCP),如果存在 $\lambda \in R^p, \mu \in R^m$,使得 $0 \in \lambda^{\mathrm{T}} \partial f(\bar{x}) + \mu^{\mathrm{T}} \partial g(\bar{x}), \mu^{\mathrm{T}} g(\bar{x}) = 0, \mu \geqq 0, \lambda \geqslant 0$.

定义 4[6]　设 $\bar{x} \in R^n$,(f,g) 称为在 $x \in X$ 是 KT-伪Ⅱ型不变凸,如果存在向量函数 $\eta: R^n \times R^n \times R^{p\times n} \times R^{m\times n} \to R^n$ 满足,对 $x \in R^n$,有:

$$f(x) - f(\bar{x}) \leqslant 0 \Rightarrow \begin{cases} \xi_i \eta(x,\bar{x},\xi,\zeta) < 0, \forall i \in I \\ \zeta_j \eta(x,\bar{x},\xi,\zeta) \leqq 0, \forall j \in J(\bar{x}) \end{cases} \quad \forall \xi \in \partial f(x), \forall \zeta \in \partial f(\bar{x})$$

其中,$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_p), \zeta = (\zeta_1, \cdots, \zeta_m)$.

可行解 $\bar{x}$ 称为(CMP)的有效解,如果不存在另外一个可行解 x,使得 $f(x) \leqslant f(\bar{x})$.

2　Mond-Weir 对偶

对于不可微多目标规划问题(CMP),研究如下形式的 Mond-Weir 对偶模型:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{MD1}) \quad \max\ f(y) \\ &\mathrm{s.t.} \quad \begin{cases} 0 \in \lambda^{\mathrm{T}} \partial f(y) + \mu^{\mathrm{T}} \partial g(y) \\ \mu_j^{\mathrm{T}} g_j(y) = 0, j = 1,2,\cdots,m, \mu \geqq 0, \mu \in R^n \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

下面首先建立关于 Mond-Weir 对偶模型(MD1)的限制逆对偶定理:

定理 1　设 (y,λ,μ) 是(MD1)的可行解,且存在 $x \in K$ 使得 $f(x) = f(y)$. 如果 (f,g) 是 KT-伪Ⅱ型不变凸的,则 x 是(CMP)的有效解.

证明　假设 x 不是(CMP)的有效解,则存在 $\bar{x} \in K$,使得 $f(\bar{x}) \leqslant f(x) = f(y)$. 由 (f,g) 是 KT-伪Ⅱ型不变凸的可知,对 $\forall \xi_i \in \partial f(y), \forall \zeta_j \in \partial g_j(y)$,存在向量函数 $\eta: R^n \times R^n \times R^{p\times n} \times R^{m\times n} \to R^n$,使得 $\xi_i \eta(\bar{x},y,\xi,\zeta) < 0$, $\forall i \in I$;$\zeta_j \eta(\bar{x},y,\xi,\zeta) \leqq 0, \forall j \in J(y)$. 所以:

$$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i + \sum_{j\in J(y)} \mu_i \zeta_j\right) \eta(\bar{x},y,\xi,\zeta) < 0 \tag{2}$$

又因为 (y,λ,μ) 是(MD1)的可行解,则存在 $\lambda \in R^p, \mu \in R^m$,使得 $0 \in \lambda^{\mathrm{T}} \partial f(y) + \mu^{\mathrm{T}} \partial g(y), \mu_j^{\mathrm{T}} g_j(y) = 0, j = 1,2,\cdots,m, \mu \geqq 0, \lambda \geqslant 0$,即存在 $\xi_i \in \partial f_i(y), \zeta_j \in \partial g_j(y)$,使得:

$$\sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i + \sum_{j\in J(y)} \mu_i \zeta_j = 0, (\lambda, \mu_{J(y)}) \geqslant 0, \lambda \neq 0 \tag{3}$$

因为 (f,g) 是 KT 伪 Ⅱ 型不变凸的,故式(2)中的这样的 $\eta(\bar{x},y,\xi,\zeta)$ 存在. 式(3)两边同乘以 $\eta(\bar{x},y,\xi,\zeta)$ 得 $\left(\sum_{i\in I} \lambda_i \xi_i + \sum_{j\in J(y)} \mu_i \zeta_j\right) \eta(\bar{x},y,\xi,\zeta) = 0$,这与式(2)矛盾. 故 x 是(CMP)的有效解.

3　混合对偶

对于不可微多目标规划问题(CMP),研究如下形式的混合对偶模型:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{MD2}) \quad \max\ f(y) + \mu^{\mathrm{T}} g(y) e \\ &\mathrm{s.t.} \quad \begin{cases} 0 \in \lambda^{\mathrm{T}} \partial f(y) + \mu^{\mathrm{T}} \partial g(y), \mu^{\mathrm{T}} g(y) \geqslant 0 \\ \mu \in R^p, \lambda \in R_+^m, \lambda^{\mathrm{T}} e = 1, e = (1,1,\cdots,1) \in R^m \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

定理 2　设 x 和 (y,λ,μ) 分别是(CMP)和(MD1)的可行解,若 $(\lambda^{\mathrm{T}} f + \mu^{\mathrm{T}} g, g)$ 在 y 点是 KT 伪Ⅱ型不变凸的且 $f_i(i \in I), g_j(j \in J)$ 在 y 点是正则的,则 $f(x) \leqslant f(y) + \mu^{\mathrm{T}} g(y) e$ 不成立.

证明　假设 $f(x) \leqslant f(y) + \mu^{\mathrm{T}} g(y) e$,由 x 和 (y,λ,μ) 分别是(CMP)和(MD2)的可行解可得 $\lambda^{\mathrm{T}} f(x) +$

$\mu^{T}g(x)\leqslant\lambda^{T}f(y)+\mu^{T}g(y)$.

又由于$(\lambda^{T}f+\mu^{T}g,g)$在$y$点是KT伪Ⅱ型不变凸的且$f_i(i\in I)$,$g_j(j\in J)$具有正则性,对$\forall\xi_i\in\partial f(y)$,$\forall\zeta_j\in\partial g_j(y)$,$(\sum_{i\in I}\lambda_i\xi_i+\sum_{j\in J(y)}\mu_i\zeta_j)\eta(\bar{x},y,\xi,\zeta)<0$,与$(y,\lambda,\mu)$是(MD2)的可行解矛盾.

定理3 设(f,g)在y点是KT伪Ⅱ型不变凸的,x是(CMP)的有效解且在x点满足约束品性,则存在λ,μ使得(x,λ,μ)是(MD2)的有效解且目标函数值相等.

证明 假设x是(CMP)的有效解且在x点满足约束品性,由文献[6]中定理3.5可知,x是KT向量临界点,即存在$(\lambda,\mu)\geqslant0,\lambda\neq0$,使得$0\in\lambda^{T}\partial f(x)+\mu^{T}\partial g(x)$,$\mu^{T}g(x)=0$. 则$x$是(MD2)的可行解且(CMP)和(MD2)的目标函数值在这些点相同. 假设x不是(MD2)的有效解,则存在(MD2)的可行解$(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$使得$f(x)+\mu^{T}g(x)e=f(x)<f(\bar{x})+\bar{\mu}^{T}g(\bar{x})e$,与定理2矛盾.

定理4 设(f,g)在K上是KT伪Ⅱ型不变凸的,y是(CMP)的可行解,如果(y,λ,μ)是(MD2)的可行解,则y是(CMP)的有效解.

证明 设y是(CMP)的可行解,如果(y,λ,μ)是(MD2)的可行解,则$0\in\lambda^{T}\partial f(y)+\mu^{T}\partial g(y)$,$\mu^{T}g(y)=0$. 因此$y$是KT向量临界点,由于$(f,g)$在$K$上是KT伪Ⅱ型不变凸的,由文献[6]中定理4.1,故y是(CMP)的有效解.

参考文献:

[1] MARTIN D M. The essence of invexity[J]. J Optim Theory Appl,1985,47(1):65-76

[2] ARANA M,RUFIÁN A,OSUNA R,et al. Pseudoinvexity,optimality conditions and efficiency in multiobjective problems; duality[J]. Nonlinear Anal TMA,2008,68 (1):24-34

[3] ARANA M,RUFIÁN A,OSUNA R,et al. A characterization of pseudoinvexity in multiobjective programming[J]. Math Comput Modelling,2008,48:1719-1723

[4] MISHRA S K,WANG S Y,LAI K K. Optimality and duality in nondifferentiable and multiobjective programming[J]. J Global Optim,2004,29:425-438

[5] SACH P H,KIM D S,LEE G M. Generalized convexity and nonsmooth problems of vector optimization[J]. J Glob Optim,2005,31:383-403

[6] ARANA M,RUIZ G,RUFIÁN A,et al. A characterization of pseudoinvexity for the efficiency in non-differentiable multiobjective problems[J]. Duality Nonlinear Anal TMA,2010,73(4):1109-1117

[7] CLARKE F H. Optimization and Nonsmooth Analysis[M]. New York:John Wiely,1983

A Note on KT-pseudoinvexity-Ⅱ

LONG Pu-jun, PI Qiao-li, ZHAO Ke-quan

(College of Mathematics,Chongqing Normal University,Chongqing 400047,China)

Abstract: In this paper, we investigate restricted converse dual theorem of a class of nondifferentiable multiobjective programming's Mond Weir dual model under KT-pseudoinvexity-Ⅱ. Furthermore,mixed dual model is introduced. The theorems of weak duality,strong duality and converse duality are obtained.

Key words: KT-pseudoinvexity-Ⅱ; Mond-Weir Duality; mixed duality; KT vector critical point

责任编辑:李翠薇