文章编号:1672 - 058X(2012)01 - 0008 - 03

高斯函数的应用*

周莉莎, 霍梦圆
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:高斯函数是一个非常重要的数论函数,利用高斯函数来解一些数学竞赛题,会使问题得到简化.利用高斯函数对组合数是一个正整数给出了另两种证明,并且给出了$(a\sqrt{p}+b\sqrt{q})^t$的末两位数的求法,体现了高斯函数的优越性.

关键词:高斯函数;数论函数;组合数
中图分类号:O156.1　　**文献标志码:**A

1　引　理

引理 1[1]　设 x,y 是实数,有 1) 若 $x\leqslant y$,则$[x]\leqslant[y]$,即有 $y=[x]$是不减函数;2) 对于任意整数 m,$[x+m]=[x]+m$,$\{x+m\}=\{x\}$;3) $[x]+[y]\leqslant[x+y]\leqslant[x]+[y]+1$,其中等号有且仅有一个成立.

引理 2[2]　设 p 为一素数,那么 $n!$ 中含 p 的次方数为$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\cdots$.

引理 3[3]　对正整数 m 有$[[x]/m]=[x/m]$.

2　结　论

结论 1　对任意 $x\geqslant 0$ 及 $n\in N_+$,都有$[nx]\geqslant\frac{[x]}{1}+\frac{[2x]}{2}+\cdots+\frac{[nx]}{n}$.

证明　令 $m=[x]$,$\alpha=\{x\}$,则 $x=m+\alpha$,所以对于任意 $k\in N_+$,有$[kx]=[\mathrm{km}+k\alpha]=\mathrm{km}+[k\alpha]$,因此,原不等式化为 $nm+[n\alpha]\geqslant(m+\frac{[\alpha]}{1})+(m+\frac{[2\alpha]}{2})+\cdots+(m+\frac{[n\alpha]}{n})$,即$[n\alpha]\geqslant\frac{[\alpha]}{1}+\frac{[2\alpha]}{2}+\cdots+\frac{[n\alpha]}{n}$.

所以只需要考虑 $0\leqslant x<1$ 的情形,当 $x\in[0,1)$时,不等式左右两端是不减的分段常量函数,其间断点都是$[0,1)$的有理数,即形如 $x=\frac{p}{q}$的点,其中 $p,q\in N^+$是互素的数,即$(p,q)=1$,且 $2\leqslant q\leqslant n$,$1\leqslant p\leqslant q-1$,因此,只需要证明不等式对 $x=0$ 及 $x=\frac{p}{q}$成立.

收稿日期:2011 - 04 - 01;**修回日期:**2011 - 04 - 25.
* **基金项目:**西南大学博士基金项目(SWUB2006053).
作者简介:周莉莎(1987-),女,四川德阳人,硕士研究生,从事数论方面研究.

当 $x=0$ 时,不等式显然成立,设 $x=\frac{p}{q}$,此时记 $a_k=[\frac{kp}{q}]$,$b_k=q\{\frac{kp}{q}\}$,$k=1,2,\cdots,n$,则 $0<b_k<q$,$kp=a_kq+bk$,所要证的不等式可以改写为 $a_n\geqslant\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}$,由于 $b_1,b_2,\cdots,b_{q-1}\neq0$,且两两不同. 否则,如果 $b_i=b_j$ $(i>j)$,则 $p-a_iq=jp-a_jq$,由此得到 $(i-j)p=(a_i-a_j)q$,$0<i-j<q$,但这是不可能的,因为 $(p,q)=1$. 因此 $\{b_1,b_2,\cdots,b_{q-1}\}=\{1,2,\cdots,q-1\}$,应用平均值定理,$\frac{\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}}{q-1}\geqslant\sqrt[q-1]{\frac{b_1b_2\cdots b_{q-1}}{1\cdot2\cdot\cdots\cdot(q-1)}}=\sqrt[q-1]{\frac{(q-1)!}{(q-1)!}}=1$,因此 $\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n}\geqslant\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_{q-1}}{q-1}\geqslant q-1$. 于是 $a_n+\frac{q-1}{q}\geqslant a_n+\frac{b_n}{q}=\frac{np}{q}=\frac{p}{q}+\frac{2p}{2q}+\cdots+\frac{np}{nq}=\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}+\frac{1}{q}(\frac{b_1}{1}+\frac{b_2}{2}+\cdots+\frac{b_n}{n})\geqslant\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}+\frac{q-1}{q}$,得证.

结论 2　证明 $C_n^m=\frac{n!}{m!\ (n-m)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}(1\leqslant m\leqslant n)$ 为正整数[4].

证明 1)　由引理2,对于任意素数 p,分子 $n!$ 中含 p 的次方数为 $\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^t}\right]$,分母 $(n-m)!m!$ 中含 p 的次方数应是 $(n-m)!$ 中含 p 的次方数与 $m!$ 中含 p 的次方数之和,即 $\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{n-m}{p^t}\right]+\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{m}{p^t}\right]=\sum_{t=1}^{\infty}(\left[\frac{n-m}{p^t}\right]+\left[\frac{m}{p^t}\right])\leqslant\sum_{t=1}^{\infty}(\left[\frac{n-m}{p^t}\right]+\left[\frac{m}{p^t}\right])=\sum_{t=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^t}\right]$. 也就是说分母中含 p 的次方数不会大于分子中含 p 的次方数. 再由标准分解定理知 C_n^m 为正整数.

证明 2)　对 $m+n$ 应用数学归纳法[5]. ① 当 $m+n=2$,即 $m=n=1$ 时,此结论显然成立;② 设 $t>3$,假定当 $m+n=2,3\cdots,t-1$ 时,结论成立.

以下证明当 $m+n=t$ 时,结论也成立.

$$n(n-1)\cdots(n-m+1)=[(n-1)\cdots(n-m+1)(n-m)]+[(n-1)\cdots(n-m+1)m]=$$
$$\{(n-1)\cdots[(n-1)-m+1]\}+\{(n-1)\cdots[(n-1)-(m-1)+1]m\}$$

由于 $(n-1)+m<t$,$(n-1)+(m-1)<t$,根据归纳法假定 $\{(n-1)\cdots[(n-1)-m+1]\}$ 可被 $m!$ 整除,因此 C_n^m 为正整数.

结论 3　求 $(a\sqrt{p}+b\sqrt{q})^t$ 的末两位数(其中 t 为偶数,$a^2p+b^2q=50$ 且 $|a\sqrt{p}-b\sqrt{q}|<1$)[6].

解　令 $m=a\sqrt{p}+b\sqrt{q}$,$n=a\sqrt{p}-b\sqrt{q}$,则 $m^2=a^2p+b^2q+2ab\sqrt{pq}$,$n^2=a^2p+b^2q-2ab\sqrt{pq}$,故 $m^2+n^2=2(a^2p+b^2q)=100$,$m^2n^2=(a^2p-b^2q)^2$.

又令 $\alpha=m^2$,$\beta=n^2$,则 α,β 是方程 $x^2-100x+(a^2p-b^2q)^2=0$ 的根,设 $S_0=\alpha^0+\beta^0=2$,$S_1=\alpha+\beta=100$,$S_2=\alpha^2+\beta^2$,$\cdots$,$S_t=\alpha^t+\beta^t$,有 $S_2-100S_1+(a^2p-b^2q)^2S_0=0$,$S_3-100S_2+(a^2p-b^2q)^2S_1=0$,$\cdots$,$S_t-100S_{t-1}+(a^2p-b^2q)^2S_{t-2}=0$,故 $S_t\equiv-(a^2p-b^2q)^2S_{t-2}(\mathrm{mod}100)$.

① 当 $t\equiv0(\mathrm{mod}4)$ 时,有:

$$S_{\frac{t}{2}}\equiv(-1)^{\frac{t}{4}}[(a^2p-b^2q)^2]^{\frac{t}{2}}S_0=(-1)^{\frac{t}{4}}(a^2p-b^2q)^tS_0=$$
$$(-1)^{\frac{t}{4}}\cdot2\cdot(a^2p-b^2q)^t(\mathrm{mod}100)$$

设 $(-1)^{\frac{t}{4}}\cdot2\cdot(a^2p-b^2q)^t\equiv\gamma(\mathrm{mod}100)$,则 $S_{\frac{t}{2}}=\alpha^{\frac{t}{2}}+\beta^{\frac{t}{2}}=m^t+n^t=(a\sqrt{p}+b\sqrt{q})^t+(a\sqrt{p}-b\sqrt{q})^t$. 由 $|a\sqrt{p}-b\sqrt{q}|<1$,$0<(a\sqrt{p}-b\sqrt{q})^t<1$,故 $(a\sqrt{p}+b\sqrt{q})^t$ 的末两位数为 $\gamma-1$.

② 当 $t\equiv2(\mathrm{mod}4)$ 时,有:

$$S_{\frac{t}{2}}\equiv(-1)^{\frac{t}{4}-\frac{1}{2}}(a^2p-b^2q)^{\frac{t}{2}-1}S_1=(-1)^{\frac{t}{4}-\frac{1}{2}}(a^2p-b^2q)^{\frac{t}{2}-1}\cdot100\equiv0(\mathrm{mod}100)$$

$$S_{\frac{t}{2}} = (a^2p + b^2q)^t + (a^2p - b^2q)^t \equiv 0(\mathrm{mod}100)$$

所以$(a^2p+b^2q)^t$的末两位数为99.

参考文献:

[1] 张君达.数论基础[M].北京:北京科学技术出版社,2002

[2] 刘诗雄.竞赛辅导[M].西安:陕西师范大学出版社,2001

[3] 闵嗣鹤,严士健.初等数论[M].北京:北京理工大学出版社,1982

[4] 曾荣,王玉.基础数论典型题解300例[M].长沙:湖南科学技术出版社,1981

[5] 刘凯年.高中数学奥林匹克同步教材[M]. 北京:北京理工大学出版社,1992

[6] 赵开明.高斯函数在数学竞赛中的应用[J]. 高师理科学刊,2007,4(7):80-81

Application of Gaussian Function

ZHOU Li-sha, HUO Meng-yuan

(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Gaussian function is one of very important number theory functions, and the questions can be simplified if Gaussian function is used to solve some mathematical contest questions. In this paper, another two kinds of proof are given for that Gaussian function is used to prove that combined number is a positive integer, and that the solving method for the last two-digit of $(a\sqrt{p}+b\sqrt{q})^t$ is provided, which embodies the advantage of Gaussian function.

Key words: Gaussian function; number theory function; combined number

责任编辑:李翠薇

(上接第3页)

Viscosity Approximation of Fixed Points of Nonexpansive Mappings in Banach Spaces

TANG Yan[1], TAO Hai-yan[2]

(1. College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. Bashu Experiment School, Chongqing Education and Science Academy, Chongqing 400074, China)

Abstract: In this paper, a modified viscosity iterative scheme is proposed for approximating the fixed point of nonexpansive mappings in a real Banach space with a uniformly Gateaux differentiable norm, whose strong convergence is proved under some suitable conditions.

Key words: fixed point; approximation; strong convergence

责任编辑:李翠薇