文章编号:1672-058X(2012)01-0001-03

Banach 空间中非扩张映射不动点的粘性逼近 *

唐 艳[1], 陶海燕[2]
(1. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067;2. 重庆市教科院 巴蜀实验学校,重庆 400074)

摘 要:在一致 Gâteaux 可微范数的 Banach 空间中,讨论了一个改进的逼近非扩张映射不动点的粘性迭代格式,并在一定条件下证明了该迭代方法的强收敛性.

关键词:不动点;逼近;强收敛

中图分类号:O177.91 **文献标志码**:A

设 E 为一实 Banach 空间,C 为 E 的一个非空闭凸子集. 若映射 $T:C\to C$ 满足条件:

$$\|Tx-Ty\| \le \|x-y\|, \forall x,y\in C$$

则称 T 为非扩张的映射. 记 $F(T)$ 为 T 的不动点集,即 $F(T)=\{x\in C:Tx=x\}$. 若映射 $f:C\to C$,存在一个实数 $\rho\in(0,1)$ 并且满足条件 $\|f(x)-f(y)\|\le\rho\|x-y\|,\forall x,y\in C$,则称映射 f 为具有压缩系数 ρ 的压缩映射.

粘性逼近方法是一种非常重要的方法,因为它们经常被应用于凸最优化、线性规划以及椭圆微分方程等. 在 Banach 空间中,关于非扩张映射不动点的逼近问题已经有许多作者做了一系列研究,并获得较好的结果[1-6].

2004 年,Xu [3] 在一致光滑的 Banach 空间中讨论了迭代格式:

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+(1-\alpha_n)Tx_n \tag{1}$$

研究了该粘性逼近方法的强收敛性.

2009 年,Yao[4] 等在 Banach 空间中固定 u,讨论了序列:

$$x_{n+1}=\alpha_n u+\beta_n x_n+\gamma_n Tx_n \tag{2}$$

进一步研究了非扩张映射不动点粘性逼近方法,在一定条件下说明了式(2)的强收敛性.

在此基础上,定义一个改进的逼近非扩张映射不动点的粘性迭代格式:

$$x_{n+1}=\alpha_n f(x_n)+\beta_n x_n+\gamma_n Tx_n, n\ge 0 \tag{3}$$

其中 $\{\alpha_n\}\{\beta_n\}\{\gamma_n\}$ 为 $(0,1)$ 中的实数列.

1 预备知识

设 E 为一实 Banach 空间,E^* 为 E 的对偶空间,$<\cdot,\cdot>$ 表示广义对偶对,称 $J:E\to 2^{E^*}$ 为正规对偶映像,如果:$Jx=\{f^*\in E^*:<x,f^*>=\|x\|^2=\|f^*\|^2\},\forall x\in E$. 今后均用 j 表示单值赋范对偶映射. 若 $S=\{x\in E:\|x\|=1\}$ 为 E 的单位球面,对任意的 $x,y\in S$,$\lim\limits_{t\to0}\dfrac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$ 一致存在,则称 E 的范数是一致

收稿日期:2010-11-03;修回日期:2011-05-10.

* 基金项目:国家自然科学基金资助项目(11001287).

作者简介:唐艳(1979-),女,四川泸州人,讲师,从事应用数学研究.

Gâteaux 可微的.

设 C 为 E 的非空闭凸子集,$T:C\to C$ 为非扩张映射,$f:C\to C$ 为具有压缩因子 ρ 的压缩映射. 对任意固定的 $u\in C$,定义:

$$T_{t,n}x=\frac{(1-\alpha_n)t}{\gamma_n+t\beta_n}f(x)+\frac{(1-t)\gamma_n}{\gamma_n+t\beta_n}Tx \tag{4}$$

其中,$t\in(0,1)$,$n\geqslant 0$,则 $T_{t,n}$是压缩的,且有唯一不动点. 记作 $p_{t,n}$,即:

$$p_{t,n}=T_{t,n}p_{t,n}=\frac{(1-\alpha_n)t}{\gamma_n+t\beta_n}f(p_{t,n})+\frac{(1-t)\gamma_n}{\gamma_n+t\beta_n}Tp_{t,n} \tag{5}$$

若固定 n,由文献[2]可得$\lim\limits_{t\to 0}p_{t,n}=p\in F(T)$.

引理 1[6] 设 E 为一实 Banach 空间,E^* 为 E 的对偶空间,$J:E\to 2^{E^*}$ 为正规对偶映像,则对任意的 $x,y\in E$,有 $\|x+y\|^2\leqslant\|x\|^2+2<y,j(x+y)>$, $\forall j(x+y)\in J(x+y)$.

引理 2[5] 设$\{a_n\}\{b_n\}\{c_n\}$均为非负实数列,对任意 $\lambda_n\in[0,1]$,若存在正整数 N,使得:$a_{n+1}\leqslant(1-\lambda_n)a_n+b_n+c_n$, $\forall n\geqslant N$. 其中, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n=\infty$, $b_n=o(\lambda_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n<\infty$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

2 主要结果

定理 1 设 E 为一致 Gâteaux 可微的实 Banach 空间,C 为 E 的非空闭凸子集. $T:C\to C$ 为非扩张映射,$F(T)\neq\varnothing$,$T_{t,n}$ 由式(4) 所定义,$f:C\to C$ 是具有压缩系数 ρ 的压缩算子. 设序列$\{x_n\}$ 由式(3) 所定义,其中$\{\alpha_n\}\{\beta_n\}\{\gamma_n\}$ 为(0,1) 中的实数列,且满足(ⅰ)$\alpha_n+\beta_n+\gamma_n=1,n\geqslant 0$;(ⅱ) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty$;(ⅲ) $\lim\limits_{n\to\infty}\gamma_n=0$,则$\{x_n\}$ 有界,且强收敛于 T 的不动点.

证明 设 $p\in F(T)$,对于 $\forall n\geqslant 0$,由 T 的非扩张性以及 f 的压缩性,可知:

$$\|x_{n+1}-p\|=\|\alpha_nf(x_n)+\beta_nx_n+\gamma_nTx_n-p\|\leqslant(1-(1-\rho)\alpha_n)\|x_n-p\|+\alpha_n\|f(p)-p\|$$

记 $M_1=\max\{\|x_0-p\|,\frac{f(p)-p}{1-\rho}\}$,则 $\|x_n-p\|\leqslant M_1$,所以$\{x_n\}$有界. 进一步还可知$\{y_n\}\{Tx_n\}\{Ty_n\}$均有界.

另一方面,由引理 1 可知:

$$\begin{gathered}\|x_{n+1}-p\|^2=\|\alpha_n(f(x_n)-p)+\beta_n(x_n-p)+\gamma_n(Tx_n-p)\|^2\leqslant\\ \|\gamma_n(Tx_n-p)+\beta_n(x_n-p)\|^2+2\alpha_n<f(x_n)-p,j(x_{n+1}-p)>\leqslant\\ (1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+2\alpha_n<f(x_n)-p,j(x_{n+1}-p)>\leqslant\\ (1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+2\alpha_n\|f(x_n)-f(p)\|\cdot\|x_{n+1}-p\|+2\alpha_n<f(p)-p,j(x_{n+1}-p)>\leqslant\\ (1-\alpha_n)^2\|x_n-p\|^2+\rho\alpha_n(\|x_n-p\|^2+\|x_{n+1}-p\|^2)+2\alpha_n<f(p)-p,j(x_{n+1}-p)>\end{gathered}$$

若记 $M_2=\sup\|x_n-p\|^2$,整理得:

$$\|x_{n+1}-p\|^2\leqslant\left[1-\frac{2(1-\rho)}{1-\rho\alpha_n}\alpha_n\right]\|x_n-p\|^2+\frac{2\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}<f(p)-p,j(x_{n+1}-p)>+\frac{\alpha_n^2}{1-\rho\alpha_n}M_2$$

设 $p_{t,n}$为 $T_{t,n}$的唯一不动点,可将式(5)改写为:

$$p_{t,n}=tf(p_{t,n})+(1-t)\left[\frac{\beta_n}{1-\alpha_n}p_{t,n}+\frac{\gamma_n}{1-\alpha_n}Tp_{t,n}\right] \tag{6}$$

于是,$x_n-p_{t,n}=t(x_n-f(p_{t,n}))+(1-t)\left[\frac{\beta_n}{1-\alpha_n}(x_n-p_{t,n})+\frac{\gamma_n}{1-\alpha_n}(x_n-Tp_{t,n})\right]$.

所以,

$$\|x_n - p_{t,n}\|^2 \leqslant (1-t)^2 \left\| \frac{\beta_n}{1-\alpha_n}(x_n - p_{t,n}) + \frac{\gamma_n}{1-\alpha_n}(x_n - Tp_{t,n}) \right\|^2 + 2t < x_n - f(p_{t,n}), j(x_n - p_{t,n}) > \leqslant$$

$$(1-t)^2 \left[\|x_n - p_{t,n}\| + \frac{\gamma_n}{1-\alpha_n}\|x_n - Tx_n\| \right]^2 + 2t < x_n - p_{t,n}, j(x_n - p_{t,n}) > +$$

$$2t < p_{t,n} - f(p_{t,n}), j(x_n - p_{t,n}) > \leqslant$$

$$(1-t)^2 \left[\|x_n - p_{t,n}\| + \frac{\gamma_n}{1-\alpha_n}\|x_n - Tx_n\| \right]^2 +$$

$$2t\|x_n - p_{t,n}\|^2 + 2t < p_{t,n} - f(p_{t,n}), j(x_n - p_{t,n}) > \leqslant$$

$$(1+t^2)\|x_n - p_{t,n}\|^2 + \frac{\gamma_n}{1-\alpha_n}M_3 + 2t < p_{t,n} - f(p_{t,n}), j(x_n - p_{t,n}) > \tag{7}$$

其中，$M_3 = \sup\{\|x_n - Tx_n\|^2 + 2\|x_n - Tx_n\|\ \|x_n - p_{t,n}\|, n \geqslant 0\}$.

整理式(7)，并由条件(iii)，可知：

$$< f(p_{t,n}) - p_{t,n}, j(x_n - p_{t,n}) > \leqslant \frac{t}{2}M_4 + \frac{1}{2t}\frac{\gamma_n}{1-\alpha_n}M_3 \tag{8}$$

其中，$M_4 \geqslant \sup\{\|p_{t,n} - x_n\|^2, n \geqslant 0, 0 < t < 1\}$.

由式(8)得：

$$\limsup_{t\to 0}\ \limsup_{n\to\infty} < f(p_{t,n}) - p_{t,n}, j(x_n - p_{t,n}) > \leqslant 0 \tag{9}$$

又$\lim\limits_{t\to 0} p_{t,n} = p$，所以$\limsup\limits_{t\to 0}\ \limsup\limits_{n\to\infty} < f(p) - p, j(x_n - p) > \leqslant 0$.

所以，$\|x_{n+1} - p\|^2 \leqslant \left[1 - \frac{2(1-\rho)}{1-\rho\alpha_n}\alpha_n\right]\|x_n - p\|^2 + \frac{2\alpha_n}{1-\rho\alpha_n} < f(p) - p, j(x_{n+1} - p) > + \frac{\alpha_n^2}{1-\rho\alpha_n}M_2 = \left[1 - \frac{2(1-\rho)}{1-\rho\alpha_n}\alpha_n\right]\|x_n - p\|^2 + \frac{2(1-\rho)\alpha_n}{1-\rho\alpha_n}\left[\frac{1}{1-\rho} < f(p) - p, j(x_{n+1} - p) > + \frac{\alpha_n}{2(1-\rho)}M_2\right]$. 记 $\lambda_n = \frac{2(1-\rho)}{1-\rho\alpha_n}\alpha_n$，则由式(9)和引理 2，可知$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - p\| = 0$，即数列$\{x_n\}$强收敛于 T 的不动点.

注：式(3)中，令 $\beta_n = 1$，则可退化文献[3]的结论.

参考文献：

[1] REICH S. On the Aymptotic behavior of nonlinear semigroups and the range of accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 1981, 79: 113-126

[2] REICH S. Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1980, 75: 287-292

[3] XU H K. Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings[J]. J Math Anal Appl, 2004, 298: 279-281

[4] YAO Y H. Strong convergence of an iterative method for nonexpansive mappings with control conditions[J]. Nonlinear Analysis, 2009, 70: 2332-2336

[5] LIU L S. Ishikawa and Mann iterative processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings in Banach space[J]. J Math Anal Appl, 1995, 194: 114-125

[6] CHANG S S. On Chidume's open questions andapproximation solutions of multivalued strongly accretive mappings equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1997, 216: 94-111

（下转第 10 页）