

文章编号:1672-058X(2011)06-0594-04

金融数据变结构波动性模型的综述及研究进展

郭悦¹,王娜²,蒋宏兰¹

(1. 重庆大学 数学与统计学院,重庆 400044;2. 成都理工大学 管理科学学院,成都 610059)

摘要:分别从马尔可夫转换模型、马尔可夫混合模型及马尔可夫与 ARCH 类模型的联合,对变结构金融数据波动性模型进行了综述;这种变结构的波动模型克服了传统波动性模型(ARCH 类)波动持续性被高估及无法实现体制(状态)间的转换的不足。

关键词:马尔可夫转换模型;混合密度;马尔可夫 GARCH 模型

中图分类号:TP391

文献标志码:A

随着全球金融市场的迅猛发展,金融市场呈现出来的波动性也史无前例。为了描述波动性的时变性和尖峰厚尾的现象,1982 年,Engle^[1]引入了自回归条件异方差(ARCH),作为描述金融资产价格波动持续性的传统方法,ARCH 给出了计算时间序列的条件方差的方法。

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t z_t \\ z_t: \text{IID}, E(z_t) = 1, \text{Var}(z_t) = 0 \\ \sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases}$$

其中 ε_t, σ_t 分别为 t 时刻的回报及条件方差。可是,当模型中的阶数 q 受到样本容量的限制时,也会影响预测。1986 年,Bollerslev^[2]又提出了推广的 ARCH 模型——广义的自回归条件异方差模型(GARCH),即在方差的表达式中加入了自回归项。如:

$$\sigma_t^2 = \omega_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

相比 ARCH,GARCH 模型减少了要估计的参数个数,大大提高了计算效率。但是,这个 ARCH 类模型是利用过去的样本数据进行拟合从而估计模型。进行预测的拟合期数据与预测期数据基于同一模型,没考虑波动率的结构变化,对金融市场的预测能力不强。且用 ARCH 类模型族往往会呈现出很高水平的持续性。Diebold(1986)^[3]指出,如果条件波动中存在变结构,这种高持续性可能是虚假的,而且 Lamoureux, Lastrages(1990)^[4]等人研究结果证明,如果在波动过程中考虑这种变结构变换,其持续性水平的确降低了。ARCH 类模型的系数不变使得模型没考虑到体制间的转换问题,然而,金融市场是变化的,这就要求采用变结构的波动模型建模。

1 马尔可夫转换模型

由于战争、政策或是经济危机会导致经济系统体制的转变,如果还是用同一个模型来刻画宏观经济或金融时间序列,必然会导致错误的描述和预测。

Hamilton(1989)^[5]最初提出马尔可夫转换模型(Markov-Switching model,简称:MS),将由不同机制生成

收稿日期:2010-12-17;修回日期:2011-02-18.

作者简介:郭悦(1986-),女,江西吉安人,硕士研究生,从事金融风险管理研究.

的数据结合进一个单一模型中。

假设 y_t 为某经济变量增长率,经济增长时服从: $y_t - \mu_1 = \varphi(y_{t-1} - \mu_1) + \varepsilon_t$; 经济紧缩时,则用另外一种形式来刻画: $y_t - \mu_2 = \varphi(y_{t-1} - \mu_2) + \varepsilon_t$ 。如果用 Δt 来控制体制之间的转换,可以合并成一个: $y_t - \mu_{\Delta t} = \varphi(y_{t-1} - \mu_{\Delta t}) + \varepsilon_t$; $\Delta t = 1$ 或 2 ; Δt 称为内生变量。

最基本的 MS 模型可以写成如下形式:

$$\begin{cases} y_t = \mu(s_t) + \sigma(s_t)z_t \\ z_t \sim \text{IID}, E(z_t) = 1, \text{Var}(z_t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$y_t = \ln(P_t/P_{t-1})$, P_t 为股票或指数价格; s_t 是有 K 种状态及转移概率矩阵 Π 的马尔可夫链 (Markov Chain)。特别地,当 $K=2$ 时, $y_t = \begin{cases} \mu_0 + \sigma_0 \varepsilon_t, s_t = 0 \\ \mu_1 + \sigma_1 \varepsilon_t, s_t = 1 \end{cases}$, 且 $\Pi = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 1-q & q \end{bmatrix}$; 参数 p, q 表示波动维持在同一种状态下的概率。在这个模型中,收益的期望与方差只因周期事件或离散事件发生的变化而变化。

马尔可夫转换模型被广泛应用于金融时间序列分析中,如 Engel & Hamilton (1990)^[6], Engel (1994)^[7], Vigfusson (1997)^[8] 针对外汇汇率进行了体制转换的研究。在 Vigfusson (1997)^[8] 模型的基础上, Frankel & Froot (1998)^[9] 研究关于汇率动态行为的两体制马尔可夫转换模型等等。

2 马尔可夫混合模型

在 ARCH 类模型中,一般都是假定收益率残差服从标准正态分布,可是传统的正态分布并不能很好地刻画收益分布尖峰厚尾的特征。尽管很多文献在拟合分布上提出很多设想,如 t 分布、双曲分布、Pearson IV 分布,但是结果要么是拟合效果不好要么在参数估计中可行性太低。

事实上,Clark (1973)^[10] 提出过金融数据的混合分布假设。即信息对价格和交易量产生的影响会导致收益和交易量的分布不单一,这些分布可能是有着不同参数的同一分布;也可能是有着不同参数的不同分布。混合正态分布的概率密度是几个正态概率密度的线性组合。假定 $\{y_t\}$ 服从混合正态分布,则 $f(y | \theta) = \sum_{j=1}^k p_j f_j(y)$ 。

其中 $p_j \geq 0$ 且 $\sum_{j=1}^k p_j = 1$; $f_j(y)$ 为正态分布 $N(\mu_j, \sigma_j^2)$ 的密度函数, $j = 1, 2, \dots, k$, 并假设 k 个正态分布之间是独立的; $\theta = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_k^2, p_1, p_2, \dots, p_k)$ 为混合正态分布的参数。混合正态分布不仅可以解决尖峰厚尾的问题,而且拟合出的单峰或双峰还是有偏的。 $f_j(y)$ 也能为 t 分布,并在文献中证明了混合 t 分布能更适合于离散程度大的数据。

而马尔可夫混合模型 (Markov mixture model) 在分布假设为混合分布的基础上很好地解决了数据分布的问题。事实上,式(1)中 y_t 的密度函数就是把各种当前可能状态下密度函数 $f(y_t | \Omega_{t-1}; \theta)$ 以各种状态中所对应转移概率为权重的加权。即 $y_t = \sum_{j=1}^k f(y_t | \Omega_{t-1}, s_t = j; \theta) p(s_t = j | \Omega_{t-1}; \theta)$ 。

此时 $p(s_t = j | \Omega_{t-1}; \theta)$ 是指在直到 $t-1$ 时刻给定的信息下, t 时处于状态 j 的条件概率。这个 $f(y_t | \Omega_{t-1}; \theta)$ 如上所说,可以设为正态分布或 t 分布。

Timmermann (2000)^[11] 讨论了这种模型的高阶矩;之后 Perez-Quiros 与 Timmermann (2001)^[12] 就用 MS 模型在一种新的高斯与 t 分布的混合分布基础上很好的抓住了收益的离群值分布状况,并证明了在预测股票收益密度中周期不对称性与公司的大小有一定关联。Guidonlin 与 Timmermann (2006)^[13] 证明了马尔可夫高斯混合分布在以每月为基础上能很好地评估股票与债券收益的风险。Alizadeh (2008)^[14] 等人运用 MS 模型研究能源物品的对冲,并在误差修正向量中利用了 GARCH 误差结构。最近,Haas (2009)^[15] 在每天的基础上运用马尔可夫模型,用混合高斯与混合 t 分布对主要的欧洲股票市场计算了 Var。

3 马尔可夫与 ARCH 类模型的联合

马尔可夫混合模型能产生条件异方差,然而,Pagan 和 Schwert (1990)^[16]以及 Timmermann (2000)^[11]指出,像式(1)这种基本模型中方差只能得出有限的动态性。这是因为时变的波动性仅仅是由尺度参数 σ^2 的离散转换得来,而并非包含收益过程及不同状态内连续方差的自身信息。收益的波动性实际上是由冲击反应新信息得到新的方差。由此 Hamilton 与 Susmel (1994)^[17]首先提出了 MS-ARCH (Markov-Switching ARCH)模型,用 ARCH 过程的规模因子变化表示体制(状态)的变化。如下:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \tilde{\varepsilon} \sigma'_{s_t,t} \\ \tilde{\varepsilon} = \eta_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \tilde{\varepsilon}_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \tilde{\varepsilon}_{t-q}^2 \end{cases}$$

Cai (1994)^[18]参考了 Lamoureux 及 Lastrapes (1990)^[19]的发现,提出的 MS-ARCH 模型只是考虑了方差重常数项的状态转换,在每一期的似然函数只依赖于最近 q 期的体制(状态)历史。其模型为:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \eta_t \sigma_t \\ \sigma_t^2 = \alpha_0(s_t) + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_q \varepsilon_{t-q}^2 \end{cases}$$

之后,又把马尔可夫转换模型扩展到 GARCH 模型中,但这也是照搬了 Cai (1994)^[18]的思想,只是在 GARCH 的方差重常数项加入状态转换。国内的大多数文献都是用到这种模型(如文献[20][21][22])。Hamilton 与 Susmel (1994)^[17]将其 MS-ARCH 模型运用于股票收益率,发现 MS-ARCH-L(带杠杆效应的状态变化模型)无论从拟和优度还是从预测表现都优于单状态(G)ARCH 模型。Cai (1994)^[18]用 MS-ARCH 成功地拟合了三月期短期国库券利率月数据,准确地识别出了两个显著状态变动。

之后 Grey (1996)^[23],除了在 GARCH 的常数项加入状态转移的变量,其他的参数均依赖于状态的变化:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0(s_t) + \alpha_1(s_t) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1(s_t) \sigma_{t-1}^2 \quad (2)$$

但是这样却会产生路径依赖问题。因为由递归可得 $\sigma_t^2 = \sum [\alpha_0(s_{t-i}) + \alpha_1(s_{t-i}) \varepsilon_{t-1-i}^2] \prod_{j=0}^{i-1} \beta_1(s_{t-j}) + \sigma_0^2 \prod_{i=0}^{t-1} \beta_1(s_{t-i})$, 此时 σ_t^2 应为 $\sigma_t^2(s_t, s_{t-1}, \dots, s_0)$ 。所以,每一期似然函数都将依赖于整个状态历史,则需对所有可能的状态路径进行累加,计算量很大,操作起来非常复杂。正是如此,之前 Cai (1994)^[18]等都只是考虑了状态转换的 ARCH 模型。

为了解决路径依赖问题, Grey (1996)^[23]注意到式(2)中的条件分布是具有时变混合权数的混合正态分布。这里的混合权数由事前状态概率(ex ante regime probability)计算得出,即 $p_{t-1}(s_t = j) = P(s_t = j | F_{t-1})$, $j = 1, 2, \dots, k$ 。这里的 F_{t-1} 表示 $t-1$ 时刻的可观测信息集。 $p_{t-1}(s_t = j)$ 表示的是:已知 $t-1$ 时刻的信息, t 时刻 j 状态下的马尔可夫链的概率。已知 $t-2$ 时刻的信息, ε_{t-1} 的条件方差就可以由如式(3)算得:

$$h_{t-1} = \sum_{i=1}^k p_{t-2}(s_{t-1} = j) \sigma_{jk-1}^2 \quad (3)$$

其中 σ_{jk-1}^2 是已知 $s_{t-1} = j$ 时 ε_{t-1} 的方差。Grey (1996)^[23]对于每个状态方差都用式(3)来代替式(2),得 $\sigma_{it}^2 = \alpha_{0i} + \alpha_{1i} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{1i} h_{t-1}$, $i = 1, 2, \dots, k$ 。此时,模型中的 h_t 只依赖于当前状态,因而不存在路径依赖问题,使实际的计算变成可能。算法详见 Grey (1996)^[23]。

然而这种模型在理论上的确在数据分布的拟合与变结构波动预测都有很好的效果,但是要么估计过程仍旧繁锁,要么动态的性质不能很好地完成。在运用方面,很多学者根据实际的背景进行了改进。Klaassen (2002)^[24]分析三种美元汇率,并分出波动的两个状态,运用 MSGARCH 对原有的波动模型(GARCH)进行改进,并证明这种模型解决了原有单一状态下持续性高的波动模型问题,也显著提高了样本外的预测。Haas (2004)^[25]等人采用一种新的模型,这种模型把方差变化过程进行分解,并运用于多种汇率收益序列解释了

这种新方法,而且得出这比 Grey (1996)^[23] 的模型可行性高很多的结论。Brunetti (2008)^[26] 等人运用 MSGARCH 研究了汇率的波动,并得出有效的汇率、货币供应量与货币储备、股票指数收益及银行股指收益有关。Satoyoshi 与 Mitsui (2010)^[27] 运用 MSGARCH 模型对日经指数的定价进行了有效性分析,算法运用了 Monte Carlo 算法,并且得出 MSGARCH 与学生 t 分布假设得出的结果比原有的定价模型如 GARCH, Black-Scholes 模型更为精确。

参考文献:

- [1] ENGLE R F. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of variance of United Kingdom inflation [J]. *Econometrica*, 1982, 50: 987-1008
- [2] BOLLERSLEV T. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity [J]. *Journal of Econometrics*, 1986(31): 307-327
- [3] DIEBOLD F X. Modeling the persistence of conditional variances: a comment [J]. *Econometric Review*, 1986(5): 1-50
- [4] LAMOUREUX C G, LASTRAPES W D. Persistence in variance, structural change, and the GARCH model [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1990(8): 225-234
- [5] HAMILTON J D. A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle [J]. *Journal of Financial Economics*, 1996, 42: 27-62
- [6] ENGEL C, HAMILTON J D. Long Swings in the Dollar: Are they in the Data and do markets know it [J]. *American Economic Review*, 1990, 80: 689-713
- [7] ENGEL C. Can the Markov Switching Model Forecast Exchange Rates [J]. *Journal of International Economics*, 1994, 36: 151-165
- [8] VIGFUSSON R. Switching between Chartists and Fundamentalists: A Markov Regime-Switching Approach [J]. *International Journal of Finance and Economics*, 1997(2): 291-305
- [9] FRANKEL J A, FROOT K A. Chartists, fundamentalists and the demand for dollars [J]. *Greek Economic Review* 1988(10): 49-102
- [10] CLARK P K. A subordinated stochastic process model with finite variance for speculative prices [J]. *J R Stat Soc B*, 1977, 39: 1-38
- [11] TIMMERMANN A. Moments of markov switching models [J]. *Journal of Econometrics*, 2000, 96: 75-111
- [12] PEREZ-QUIROS G, TIMMERMANN A. Business cycle asymmetries in stock returns: Evidence from higher order moments and conditional densities. [J] *Journal of Econometrics* 2001(103): 259-306
- [13] GUIDOLIN M, TIMMERMANN A. Term structure of risk under alternative econometric specifications [J]. *Journal of Econometrics*, 2006(131): 285-308
- [14] ALIZADEH, NOMIKOS, POULIASIS. A markov regime switching approach for hedging energy commodities [J]. *Journal of Banking & Finance*, 2008, 32: 1970-1983
- [15] HAAS M. Value-at-Risk via mixture distributions reconsidered [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2009, 215: 2103-2119
- [16] PAGAN A R, SCHWERT G W. Alternative models for conditional stock volatility [J]. *Journal of Econometrics*, 1990, 45: 267-290
- [17] HAMILTON J D, SUSMEL R. Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime [J]. *Journal of Econometrics*, 1994, 64: 307-333
- [18] CAI J. A markov model of switching-regime ARCH [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1994(12): 309-316
- [19] LAMOUREUX C G, LASTRAPES W D. Persistence in variance, structural change, and the GARCH model [J]. *Journal of Business and Economic Statistics*, 1990(8): 225-234
- [20] 孙金丽, 张世英. 具有结构转换的 GARCH 模型及其在中国股市的应用 [J]. *系统工程学报*, 2003, 21(6): 86-91
- [21] 蒋祥林, 王春峰 吴晓霖. 基于状态转移 ARCH 模型的中国股市波动性研究 [J]. *系统工程学报*, 2004, 19(3): 270-277
- [22] 江孝感, 万蔚. 马尔科夫状态转换 GARCH 模型的波动持续性研究——对估计方法的探讨 [J]. *数理统计与管理*, 2009, 28(4): 637-645
- [23] GRAY S F. Modeling the conditional distribution of interest rates as a regime-switching process [J]. *Journal of Financial Economics*, 1996 (42): 27-62
- [24] KLAASSEN F. Improving GARCH volatility forecasts with regime switching GARCH [J]. *Empirical Economics*, 2002, 27: 363-394
- [25] HAAS M, MITTNIK S, PAOLELLA M. A new approach to markov-switching GARCH models [EB/OL]. <http://www.uni-tuebingen.de/dgf/program/CPaper115.pdf>, 2004-03-31
- [26] BRUNETTI C, SCOTTI C, MARIANO R, et al. Markov switching GARCH models of currency turmoil in southeast Asia [J]. *Emerging Markets Review*, 2008 (9): 104-128