文章编号:1672 -058X(2011)06 -0583 -02

一类新的优美图的构造及其证明*

刘家保,张 季,聂东明
(安徽新华学院 教务处,合肥 230088)

摘 要:优美图是图论中极为有趣的重要研究课题之一,有着广泛的应用价值和研究前景. 讨论了一类新的构造优美图的方法,并且给出了它们都是优美图的严格的数学证明,从而得到了图 $G_n = T \vee \overline{k_n}$ 具有优美标号算法并且都是优美图等结论. 所给的新的优美标号不同于现有的文献的结果.

关键词:优美标号;优美图;联图
中图分类号:O157.5 **文献标志码**: A

优美图是图论中极其有趣的重要研究内容之一,所研究的图类是一类新的特殊的简单无向图. 图论中关于优美图的研究课题是 20 世纪 60 年代提出的,它一出现就引起了许多学者的兴趣和关注,并取得了不少成果,但至今仍未完全解决.

优美图的优美标号可应用于代数编码理论、通信网络编址、射电天文学、导弹控制码设计同步、整电压发生器设计等方面,一直以来深受人们的重视,迄今,已有许多这方面的成果[1-13]. 但由于对优美图的研究就目前国内外的研究成果来看,尚缺乏一个系统和有力的工具,所以目前只能对一些特殊的图类探索其优美标号算法和优美性.

定义 1 简单无向图 G 的一个优美标号,是指图 G 的一个顶点标号 L,它满足:当 G 的边 $e = uv$ 时,由 $L'(e) = |L(u) - L(v)|$ 导出的边标号 L',会分配给各边不同的边标号,这时 L' 为边集 $E(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,|E|\}$ 的双射. 图 G 有优美标号 L,则称图 G 为优美图[6].

定义 2 设 G_1 和 G_2 是两个点不交的无向图,G_1 和 G_2 的联图(Joined graph)$G_1 \vee G_2$ 是在 $G_1 \cup G_2$ 中把图 G_1 的每个顶点与图 G_2 的每个顶点之间用一条边连接起来所得到的无向图. 图论研究中很多典型的图都可以通过联而得到,例如轮形图 W_n,即 $v_0 \vee C_n$;扇形图 F_n,即 $v_0 \vee P_n$. 此处提出了一类新的联图 $G_n = T \vee \overline{k_n}$ 的优美性,得到了这一类新的联图 $G_n = T \vee \overline{k_n}$ 优美标号的算法,并给出了它是优美图的严格的数学证明,从而得到了图 $G_n = T \vee \overline{k_n}$ 具有优美标号算法并且都是优美图等结论.

定理 1 设 T 是任何一个优美树,$\overline{k_n}$ 是仅有 n 个顶点的空图,n 是任意正整数,则图 $G_n = T \vee \overline{K_n}$ 是优美图.

证明 设 $V(T) = \{u_i \mid i = 1,2,\cdots,m\}$,$V(\overline{k_n}) = \{v_i \mid i = 1,2,\cdots,n\}$. 不妨假设 L_1 为 T 的优美标号,$L_1(u_i) = i - 1, i = 1,2,\cdots,m$.

定义图 $G_n = T \vee \overline{K_n}$ 的各顶点的标号递推算法 H 如下:

(1) $L(u) = L_1(u), (u \in V(T))$;(2) $L(u) = |E(T)| + im, (u \in V(\overline{k_n}) = \{v_i \mid i = 1,2,\cdots,n\})$.

引理 1 按照算法 H 可得:图 $G_n = T \vee \overline{K_n}$ 中各顶点的标号均不相同,即顶点集与集合 $\{0,1,2,\cdots,|E(T)| + nm\}$ 构成单射.

证明 首先,图 $G_n = T \vee \overline{K_n}$ 各顶点的标号不同. 事实上,因为 L_1 为 T 的优美标号,所以对 $\forall u_i, u_j \in$

收稿日期:2011 -01 -11;**修回日期**:2011 -03 -20.
* **基金项目**:安徽省自然科学基金项目(N0. KJ2010B076,KJ2009B179Z);安徽新华学院校级科研项目(2009ZR006).
作者简介:刘家保(1982-),男,安徽六安人,讲师,硕士,从事组合数学与组合网络研究.

$V(T)$,有 $L(u_i)\neq L(u_j)$.

其次,对 $\forall v_i, v_j \in V(\overline{k_n})$,$v_i \neq v_j$. 由(2)可知对顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$,有 $L(v_i)\neq L(v_j)$. 若 $L(v_i)=L(v_j)$,即 $|E(T)|+im=|E(T)|+jm$,则 $i=j$,矛盾. 所以 $L(v_i)\neq L(v_j)$.

再次,$\min\{L(u), u\in V(\overline{K_n})\}=|E(T)|+im>\max\{L(u), u\in V(T)\}=|E(T)|$.

最后,说明 L 对图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 的顶点的最大标号为:$\max\{L(u), u\in V(T\vee\overline{K_n})\}=L(v_n)=|E(T)|+nm=|E(T\vee\overline{K_n})|$.

至此,可以得出 L 对图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 各顶点的标号各不相同,即图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 的顶点集与集合 $\{0,1,2,\cdots,|E(T)|+nm\}$ 构成单射.

引理 2 图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 中各边的标号均不相同,即图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 的边集与集合 $\{1,2,\cdots,|E(T)|+nm\}$ 构成单射.

证明 由引理 1,显然有图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 中各边的标号都不超过 $|E(T)|+nm$. 下面分 2 种情况对边的标号进行讨论:

第一种情况:对于 T 中的边,$\{L(E(T))\}=\{1,2,\cdots,|E(T)|\}$.

第二种情况:对于图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 中的联边,$\{L(u_i v_j) \mid u_i\in V(T), V_j\in V(\overline{k_n})\}=\{|E(T)|+1, |E(T)|+2, \cdots, |E(T)|+m, |E(T)|+m+1, \cdots, |E(T)|+m+2, \cdots, |E(T)|+2m, \cdots, |E(T)|+nm. \mid i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n\}$.

显然所有不同的边有不同的标号.

综上所述,图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 各边的标号均不相同,即图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 的边集与集合 $\{1,2,\cdots,|E(T)|+nm\}$ 构成单射.

最后,由引理 1 和引理 2 及优美图的定义可知,T 是任何一个优美树,$\overline{k_n}$ 是仅有 n 个顶点的空图,n 是任意正整数,则图 $G_n=T\vee\overline{K_n}$ 是优美图. 至此完成定理 2 的证明.

参考文献:

[1] 刘家保,吕宁宁,余国锋. 关于一类新的树的优美标号[J]. 河北北方学院学报:自然科学版,2010,26(5):1-4

[2] 刘家保,潘向峰. 轮形图和扇形图的优美性[J]. 安徽大学学报:自然科学版,2009,133(4):11-13

[3] 刘家保,吕宁宁,潘向峰. 一类新的单圈图的优美性与平衡性[J]. 合肥学院学报:自然科学版,2008,18(2):18-23

[4] 童贻民,刘家保,蒋珍珍,等. 三圈图的第一广义 Zagreb 指标最值问题[J]. 合肥学院学报:自然科学版,2010,20(1):4-7

[5] 吕宁宁,刘家保. 有 r(≥3)个圈仙人掌图的零阶广义 Randic 指数的界[J]. 合肥学院学报:自然科学版,2010,20(3):15-18

[6] 马克杰. 优美图[M]. 北京:北京大学出版社,1991

[7] CAI H,WEI L X,LU X R. The gracefulness of uncon2nected graphs $(P_1\vee P_n)\cup(P_3\vee K_r)$[J]. Journal of Jilin University (Sci2ence Edition),2007,45(4): 539-543

[8] WEI L X,J IA Z Z. The gracefulness of unconnected graphs $G_1\cup G_2$ and $G_1\cup G_2\cup K_2$[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2005,28(4):689-694

[9] 严谦泰. 关于 $P_{2r,2m}$ 的优美标号[J]. 系统科学与数学,2006,26(5):513-517

[10] 魏丽侠,张昆龙. 图 $K_1\vee C_n$ 的非连通并图的优美性[J]. 中山大学学报:自然科学版,2007,46(4):13-16

[11] 魏丽侠,张昆龙. 几类并图的优美标号[J]. 中山大学学报:自然科学版,2008,47(3):10-13

[12] GOLOMB S W. How to number a graph,Graph thery and computing[M]. New York:Academic Press,1972

[13] 潘伟,路线. $K_2\wedge K_{m,n}$ 的优美性[J]. 吉林大学学报:理学版,2004,42(3):365-366

(下转第 589 页)