文章编号:1672-058X(2011)06-0580-03

对偶分支 q-矩阵生成的 Markov 积分半群的 Feller 性*

张一进[1],赵文强[2]
(1. 重庆邮电大学 数理学院,重庆 400065;2. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:研究了对偶分支 q-矩阵生成的 Markov 积分半群的 Feller 性、极限行为等.

关键词:对偶分支 q-矩阵;Markov 积分半群;保守性;Feller 性;极限行为
中图分类号:O177.2　　**文献标志码**: A

Markov 分支过程[1]是随机过程中的一类非常重要的分支(文中未给出定义的名词术语请参阅相关文献),有着广泛的应用. 分支过程的 q- 矩阵($\tilde{q}_{ij}$)具有形式:

$$\tilde{q}_{ij}=\begin{cases} ib_{j-i+1}, j\geqslant i-1 \\ 0,\text{否则}\end{cases} \tag{1}$$

其中, $b_k\geqslant 0, k\neq 1, \sum_{k\geqslant 0} b_k\leqslant 0$.

对偶分支过程是很重要的时间连续 Markov 链,状态空间 $E=Z^+=\{0,1,2,\cdots\}$,其 q-矩阵 $Q=(q_{ij};i,j\in E)$[2]可表示为:

$$q_{ij}=\begin{cases} ia_{j-i+1}-(j+1)a_{i-j}, i\geqslant j-1 \\ 0,\text{否则}\end{cases} \tag{2}$$

其中, $a_k=\sum_{j=0}^{k} b_j, k\geqslant 0, b_j$ 是分支过程 q- 矩阵 $\tilde{Q}$ 的序列,且 $a_0\leqslant 0, a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_k\geqslant\cdots\geqslant 0, a_{-1}=0$.

定理 1[3]　对偶分支矩阵 Q 在空间 l_∞ 上生成一正的压缩积分半群 $T(t)=(T_{ij}(t);i,j\in Z^+)$的充要条件是:$Q$ 是零流出的. 此时 $F(t)=(f_{ij}(t))=(T'_{ij}(t))$恰为最小 Q-函数.

定理 2[3]　定理 1 得到的正压缩积分半群是 Markov 积分半群,仍记作 $T(t)$.

对偶分支 q-矩阵是保守的,这是因为:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty}[(j+1)a_{i-j}-ja_{i-j+1}]&=\sum_{j=0}^{i+1}[(j+1)a_{i-j}-ja_{i-j+1}]=\\ &a_i+(2a_{i-1}-a_i)+(3a_{i-2}-2a_{i-1})+\\ &(4a_{i-3}-3a_{i-2})+\cdots+((i+2)a_{-1}-(i+1)a_0)=\\ &(i+2)a_{-1}=0\end{aligned}$$

引理 1　对偶分支 q-矩阵是零流出的,即方程$(\lambda I-Q)x=0, 0\leqslant x\leqslant 1$ 无非零解.

证明　在 Q 中,$a_0>0, a_k\leqslant a_{k+1}\leqslant 0(\forall k\geqslant 0)$,而 Q 是保守的,有$(a_1-2a_0)+(2a_0-3a_{-1})=0$,即$a_{-1}=\frac{a_1}{3}\leqslant 0$,那么:

$$R=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{q_{n,n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)a_0-(n+2)a_{-1}}=$$

收稿日期:2011-05-31;**修回日期**:2011-09-15.
* **基金项目**:重庆邮电大学自然科学基金项目(A2011-19);重庆市教委科研基金(KJ091315).
作者简介:张一进(1978-),男,陕西咸阳人,讲师,硕士,从事马氏过程的研究.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(a_0-a_{-1})n+a_0-2a_{-1}}=+\infty$$

由文献[4]的定理 2 知,Q 是零流出的.

定理 3　对偶分支矩阵生成的积分半群 $T(t)$ 是次随机单调的,关于 t 是递增的,$T(t)$ 是 Feller 的,即对于 $j\in Z^+$,$t>0$,有 $\lim\limits_{i\to\infty}T_{ij}(t)=0$.

证明　由定理 1 知道,作为积分半群 $T(t)$ 的生成元,对偶分支 q - 矩阵 Q 是正则的,有 $\sum\limits_{k=j}^{\infty}q_{i,k}\leqslant\sum\limits_{k=j}^{\infty}q_{i+1,k}$,$i\neq 0$,$j\neq i+1$.

令 $F(t)=(f_{ij}(t))$ 是对偶分支 q - 矩阵 Q 的最小 Q-函数,那么 $\sum\limits_{k=j}^{\infty}f_{ik}(t)\leqslant\sum\limits_{k=j}^{\infty}f_{i+1,k}(t)$,$i\neq 0$,$j\neq i+1$.
因此:

$$\begin{aligned}\sum_{k=j}^{\infty}T_{ik}(t)&=\sum_{k=j}^{\infty}\int_0^t f_{ik}(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^t\sum_{k=j}^{\infty}f_{ik}(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\\&\int_0^t\sum_{k=j}^{\infty}f_{i+1,k}(s)\,\mathrm{d}s=\sum_{k=j}^{\infty}\int_0^t f_{i+1,k}(s)\,\mathrm{d}s=\\&\sum_{k=j}^{\infty}T_{i+1,k}(t)\end{aligned}$$

所以,$T(t)$ 是次随机单调的.

$T(t)$ 关于 t 是随机单调增加的,易证.

在 c_0 上 $D(Q)$ 是稠密的. 由文献[5]中推论 3.7,对偶算子 Q^* 在 l_1 上生成一个正压缩积分半群,因此由文献[5]中定理 6.1 知道,唯一的 Q-函数 $P(t)$ 是一个 Feller 转移函数,所以由定理 1,$(T'_{ij}(t))=P(t)$ 也是 Feller 的.

由定理 2,当 $i\neq 0$,$i\neq j-1$ 时,有:

$$\sum_{k=0}^{k=j}T_{ik}(t)=t-\sum_{k>j}^{\infty}T_{ik}(t)\geqslant t-\sum_{k>j+1}^{\infty}T_{i+1,k}(t)=\sum_{k=0}^{k=j}T_{i+1,k}(t)$$

因此,随 $j(j\neq i+1)$ 递增,$\sum_{k=0}^{k=j}T_{ik}(t)$ 是递减的. 又因为 $T_{ik}(t)\geqslant 0$,所以对于固定的 j,$\sum_{k=0}^{k=j}T_{ik}(t)$ 是有界的. 因此,当 $i\to\infty$ 时,$\sum_{k=0}^{k=j}T_{ik}(t)$ 的极限存在.

在矩阵 Q 中去掉 $0-m(m=i-1,i\geqslant 3)$ 行和 $0-n(n=i-2,i\geqslant 3)$ 列,可以得到一个新矩阵 Q',那么 Q' 是保守的,因此它的 Q-函数是忠实的,即对于矩阵 Q,$\sum_{j=i-1}^{\infty}f_{ij}(t)=1$,有:

$$\sum_{j=i-1}^{\infty}T_{ij}(t)=\sum_{j=i-1}^{\infty}\int_0^t f_{ij}(s)\,\mathrm{d}s=\int_0^t\sum_{j=i-1}^{\infty}f_{ij}(s)\,\mathrm{d}s=t$$

$$\sum_{j=0}^{j=i-2}T_{ij}(t)=\sum_{j=0}^{\infty}T_{ij}(t)-\sum_{j=i-1}^{\infty}T_{ij}(t)=t-t=0$$

又因为 $T_{ij}(t)\geqslant 0$,所以 $\sum\limits_{j=0}^{j=k}T_{ij}(t)=0(k\leqslant i-2)$.

固定 j,当 $i\to\infty$ 时,有 $j<i-2$,因此 $\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{k=j}T_{ik}(t)=0$.

所以得到 $\lim\limits_{i\to\infty}T_{ij}(t)=\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{k=j}T_{ik}(t)-\lim\limits_{i\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{k=j-1}T_{ik}(t)=0$,故 $T(t)$ 是 Feller 的.

参考文献:

[1] ANDERSON W J. Continuous-Time Markov Chains. Springer Series in Statistics[M]. Springer-Verlag,New York,1991

[2] CHEN M F. From Markov Chains to Non-Equilibrium Particle Systems [M]. Singapore: World Scientific,1992

[3] 张一进,李扬荣,杨春德. 对偶分支 q-矩阵生成的 Markov 积分半群[J]. 西南大学学报:自然科学版,2010,32(4):120-123
[4] LI Y R. Markov Integrated Semigroups and their Applications to Continuous-Time Markov Chains[J]. Integr equ oper theory,2008(60):247-269
[5] CHEN A Y, POLLETT P, ZHANG H J, et al. The Collision Branching Process [J]. Journal of Appl Prob, 2004, 41(4): 1033-1048
[6] LI Y R. Contraction Integrated Semigroups and Their Application to Continuous-time Markov Chains [J]. Acta Math Sinica, 2003, 19(3): 605-618
[7] 蔡井伟. 随机利率下的一类特殊年金[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(5):463-466

Feller Property of Markov Integrated Semigroup Generated by Dual Branching q-Matrix

ZHANG Yi-jin[1], **ZHAO Wen-qiang**[2]
(1. School of Mathematics and Physics, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065;
2. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: This paper studies Feller property, limit behavior and so on of Markov integrated semigroup generated by dual branching q-matrix.

Key words: dual branching q-matrix; Markov integrated semigroup; conservation; Feller property; limit behavior

责任编辑:李翠薇

(上接第 576 页)

Economic Equilibrium Issue Based on Brouwer Fixed Point Theorem

DENG Ying-han
(School of Finance, Southwest University of Finance and Economics, Chengdu 611130, China)

Abstract: This paper completes the Brouwer fixed point theorem's proof of functional analysis methods according to Vasile I. Istratescu's ideas, and uses Brouwer fixed point theorem to prove the existence of general equilibrium under pure-exchange market.

Key words: Brouwer fixed point theory; general economic equilibrium of pure-exchange market; existence

责任编辑:代小红