文章编号:1672 - 058X(2011)06 - 0574 - 03

基于 Brouwer 不动点定理的经济均衡问题

邓 璎 函
(西南财经大学 金融学院,成都 611130)

摘　要: 根据 Vasile I. Istratescu 的思路,完善了 Brouwer 不动点定理的泛函分析证明方法,并运用 Brouwer 不动点定理证明了纯交易市场下一般经济均衡的存在性.

关键词: Brouwer 不动点定理;纯交易市场的一般经济均衡;存在性
中图分类号: O174　　**文献标志码:** A

很早以前,人们就发现许多数学问题的解的存在性可归结为某映射有无不动点. 很多重要的数学成果都是借助于不动点理论而获得的,尤其是建立各类方程的解的存在唯一性问题中起着重要的作用. 在不动点理论中,最重要的结果也许是著名的 Brouwer 不动点定理[1]. 一般经济均衡理论是数理经济学的中心论题. 1954 年,Arrow 和 Debreu[2,3] 在一些具有明确经济学意义的假设条件下,用数学公理化方法深刻表述该问题,利用 Brouwer 不动点定理和 Kakutani 不动点定理,严格证明了 Walras 经济的一般均衡的存在性和最优性,使得经济学形成了一个统一的方法论和分析框架.

关于 Brouwer 不动点定理有许多证明方法. 这些证明中有一些是非常简短的,但使用了代数拓扑. 在此根据 Vasile I. Istratescu 在文献[4]的第四章的思路,完善了 Brouwer 不动点定理的泛函分析证明方法,并运用 Brouwer 不动点定理证明了纯交易市场下一般经济均衡的存在性.

1　Brouwer 不动点定理

定义 1　设 X 是拓扑空间,空间 X 称为有“不动点性质”(记为 f. p. p.),如果对任意连续函数 $f:X\to X$,有 $x_0\in X$,使得 $f(x_0)=x_0$.

引理 1　若 X,Y 都是拓扑空间,$h:X\to Y$. 是同胚[5]的,则如果 X 有 f. p. p. ,Y 也有 f. p. p..

证明　由同胚的定义可知,$h:X\to Y$ 是一个一一映射,并且 h 和 $h^{-1}:Y\to X$ 都是连续的. 于是,对任意连续函数 $g:Y\to Y$,令 $h^{-1}(y)=x$,$h^{-1}(g(y))=f(x)$. 则 $f:X\to X$ 为连续函数.

因为 X 有 f. p. p. ,则存在 $x_0\in X$,使得 $f(x_0)=x_0$. 令 $y_0=h(x_0)$,则 $h^{-1}(y_0)=x_0=f(x_0)=h^{-1}(g(y_0))$,于是 $y_0=g(y_0)$. 故 Y 也有 f. p. p..

定义 2　设 X 和 X_1 是拓扑空间,则 X_1 称为 X 的一个收缩核,如果

(1) $X_1\subset X$,

(2) 存在一个连续函数 $r:X\to X_1$,使得 $r(x)=x$,对所有 $x\in X_1$ 成立. 函数 r 称为保核收缩.

引理 2([文献[4],定理 4.1.4])　若 X 有 f. p. p. ,X_1 是 X 的任意收缩核,则 X_1 有 f. p. p..

引理 3([文献[4],定理 4.1.5])　Brouwer 不动点定理等价于以下论断:

不存在定义于 $S=\{x\in R^n \mid \|x\|\leqslant 1\}$,取值在边界 $S_1=\{x\in R^n \mid \|x\|=1\}$ 上的连续可微的保核收缩.

定理 1(Brouwer 不动点定理,[文献[4],定理 4.1.6])　如果 $f:S^n\to S^n$ 是从 R^n 中的单位闭球 $S^n=\{x\in$

收稿日期:2010 - 09 - 12;修回日期:2011 - 03 - 20.
作者简介:邓璎函(1989-),女,重庆北碚人,硕士研究生,从事金融工程研究.

$R^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$到它自身上的连续映射,则存在 $x^* \in S^n$,使得 $x^* = f(x^*)$.

2　纯交易市场的一般经济均衡

2.1　消费者理论

设商品空间为 R^n,即有 n 种商品可供选择,R^n 的每一个点,都是一个商品组合. 消费者可以从某个商品集合 R^n 中选购商品,通常假设 R^n 是 n 维欧氏空间 R^n 中的非负卦限 R^n_+. 某消费者在 R^n 中取 $x=(x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(n)})$表示选取第一种商品 $x^{(1)}$(个单位),第二种商 $x^{(2)}$,…,取第 n 种商品 $x^{(n)}$. 这里称 x 为消费向量. 值得一提的是商品这个概念是广义的,其中也包括劳力和智力等.

假设每个消费者在选取商品时都有自己的偏好. 设 $x, y \in R^n$,那么 $x \geqslant y$ 表示消费者认为商品组合 x 不比商品组合 y 差. 这里$\geqslant$称为在商品空间上消费者的一个偏好关系. 经济学家 J. R. Hicks 提炼的关于偏好的理论,以下述 3 个公理为基础:

(1)[自反性]$\forall x \in R^n$,都有 $x \geqslant x$;

(2)[完全性]$\forall x, y \in R^n$,$x \geqslant y$ 和 $y \geqslant x$ 至少有一个成立;

(3)[传递性]设 $x, y, z \in R^n$,如果 $x \geqslant y$,$y \geqslant x$,则 $x \geqslant z$;

若既有 $x \geqslant y$,又有 $y \geqslant x$,则称商品组合 x 与 y 无差异,记作 $x \sim y$. 还以 $x > y$ 表示 $x \geqslant y$ 成立,但 $x \sim y$ 不成立,即非 $y \geqslant x$.

每种商品都有它的价格,在此用价格向量 $p=(p^{(1)}, p^{(2)}, \cdots, p^{(n)})$来表示,即 $p^{(k)}$表示第种商品的单价,$k=1,2,\cdots,n$.

对于消费者来说,还有一个支付能力的问题,即消费者购买商品不能超过其支付能力 b,必须受自己的预算集 $B=\{x \in R^n \mid p \cdot x \leqslant b\}$的约束,$p \cdot x = p^{(1)}x^{(1)} + p^{(2)}x^{(2)} + \cdots + p^{(n)}x^{(n)}$表示向量 p 和 x 的内积.

消费者的合理行为是选取最为偏好的消费向量 x^*,并满足约束 $x \in B$.

上面这个在一定约束下求最为偏好向量的问题很难着手求解. 现代经济学家运用"效用"的概念来建立消费者理论. 就原意而言,效用是满意程度的刻画. 如果有一个函数,能够用函数值的大小来表示消费者的满意程度,那么这个函数就叫做效用函数. 为了使效用函数有较好的解析性态,对偏好还做了进一步的要求,就是下述两个公理:

(4)[连续性]$\forall y \in R^n$,集合$\{x \in R^n \mid x \geqslant y\}$和集合$\{x \in R^n \mid x \geqslant y\}$都是闭集;

(5)[强单调性]如果 $x \geqslant y$ 且 $x \neq y$,则 $x > y$;$x = y$;表示 x 与 y 是同一向量.

可以证明,对于具有完全性、自反性、传递性、连续性和强单调性的偏好序$\geqslant$,存在一个连续的效用函数 $u: R^n \rightarrow R$,使得 $x > y$ 当且仅当 $u(x) > u(y)$.

满足上述要求的效用函数不是唯一的[6].

引进效用函数后,消费者的合理行为可以用下述极值问题来描述:$\max\ u(x)$, s. t.　$p \cdot x \leqslant b, x \in R^n$.

如果 $p^{(k)} > 0, k=1,2,\cdots,n$,则预算集 B 是有界闭集. 由 $u(x)$的连续性可知,$u(x)$的极大值 $v(p,b)$有限,极大点 $d(p,b)$存在. $v(p,b)$叫做间接效用函数,而 $d(p,b)$叫做消费者的需求函数.

还要说明,虽然 $v(p,b)$与效用函数的取法有关,但是需求函数 $d(p,b)$与效用函数的取法无关. 设 x^* 是极大点,即 $x^* \geqslant x$, $\forall x \in B$. 事实上,由强单调性可知,$x^* > x$, $\forall x \in B \setminus \{x^*\}$,因此 x^* 还是唯一确定的.

2.2　纯交易经济模型

设纯交易经济中有 m 个参加者,他们既是消费者,要购买市场商品,同时他们手中又有商品出售. $i=1, 2, \cdots, m$. 第 i 个参加者的消费集为 $X_i \subset R^n$,消费向量为 $x_i \in X_i$,初始占有向量 $w_i \in X_i$. 设市场的价格向量为 p,这个价格向量与各成员的行为无关. 这时,第 i 个参加者的支付能力为 $b_i = p \cdot w_i$,即出售自己初始占有的商品的收入. 根据上一节介绍的消费者理论,第 i 个参加者的需求函数为下述极值问题的解:

$$\text{s. t.}\quad p \cdot w_i \leqslant w_i$$

其中 $u_i(x)$为第 i 个参加者的效用函数,设上述问题的解为 $d_i(p, p \cdot w_i)$,这就是第 i 个参加者的需求

函数.

定义 3(Walras 均衡点) 价格向量 p^* 叫做 Walras 均衡点,如果 $\Sigma_i d_i(p^*, p^* \cdot w_i) \leqslant \Sigma_i w_i$. 称需求与总初始占有之差 $z(p) = \Sigma_i d_i - \Sigma_i w_i$ 为超额需求函数,简称超需函数. 如果某个价格向量是 Walras 均衡点,那么在此价格下,纯交换经济市场的商品不短缺.

根据文献[7],过需求函数 $z(p)$ 具有下列性质:

(1) [零阶齐次性] $z(\lambda p) = z(p)$, $\forall \lambda > 0$. 从需求函数的定义可知,是下列两个等价的极值问题的解:$\max\{u_i(x) \mid p \cdot x_i \leqslant p \cdot w_i\}$ 和 $\max\{u_i(x) \mid \lambda p \cdot w_i \leqslant \lambda p \cdot w_i\}$. 故 $d_i(\lambda p, \lambda p, w_i) = d_i(p, p \cdot w_i)$,从而总超需函数是零阶齐次的.

(2) $z(p)$ 是 S^{n-1} 上的函数. 由 $z(p)$ 的零阶齐次性,可以把价格向量 p 规格化. 考虑 $p'^{(k)} = p^{(k)} / \Sigma_k p^{(k)}$,这时 $\Sigma_k p'^{(k)} = 1$,从而只须考虑价格向量 p 在 $n-1$ 维单位闭球 S^{n-1} 上 $z(p)$ 的性态.

(3) [Walras 律] 对于任意的 $p \in S^{n-1}$,有 $p \cdot z(p) = 0$. 实际上, $p \cdot z(p) = p \cdot (\Sigma_i d_i - \Sigma_i w_i) = \Sigma_i (p \cdot d_i - p \cdot w_i) = 0$,因为 $d_i(p, p \cdot w_i)$ 必须落在预算集 B_i 之中. 在偏好的局部非饱和性条件下,$p \cdot d_i = p \cdot w_i$.

从超需函数的性质和 Walras 均衡点的定义,立即可得出下列推论.

推论 1[7] 如果 p^* 是一个均衡点,且 $z(p)$ 的第 k 个分量 $z^{(k)}(p) < 0$,则 $p^{*(k)} = 0$,即如果某种商品在 Walras 均衡点处是超额需求的,则该商品一定是免费的.

推论 2[7] 如果对所有的 k,都满足(1)若 $p^{(k)} = 0$,则 $z^{(k)}(p) > 0$;(2)p^* 是均衡点. 则 $z^{(4)}(p^*) = 0$,即总需求和总初始占有相等.

2.3 均衡点的存在性

用 Brouwer 不动点定理可以证明 Walras 均衡点的存在性.

定理 2(均衡点的存在性) 如果超需函数 $z: S^{n-1} \to R^n$ 连续,且满足 Walras 律,则存在 $p^* \in S^{n-1}$,使得 $z^{(k)}(p^*) \leqslant 0$.

证明 (根据文献[7])令:

$$g^{(k)}(p) = \frac{p^{(k)} + \max\{0, z^{(k)}(p)\}}{1 + \Sigma_k \max\{0, z^{(k)}(p)\}}$$

$$g(p) = \{g^{(1)}(p), g^{(2)}(p), \cdots, g^{(n)}(p)\}$$

则 $g(p)$ 在 S^{n-1} 上连续. 此外, $\Sigma_k g^{(k)}(p) = 1$,即 $g(p)$ 落在 S^{n-1} 上. 由 Brouwer 不动点定理可知,存在不动点 p^*,使得 $g(p^*) = p^*$.

下证 p^* 就是 Walras 均衡点. 否则,设 $\Sigma_k \max\{0, z^{(k)}(p^*)\} > 0$,则由 $g(p^*) = p^*$ 可得 $p^{*(k)} + \max\{0, z^{(k)}(p^*)\} = (1 + \Sigma_k \max\{0, z^{(k)}(p^*)\}) p^{*(k)} = c p^{*(k)}$,其中 $c > 1$. 由此可知 $z^{(k)}(p^*) > 0, k, 1, 2, \cdots, n$,又 $p \in S^{n-1}$,故 $\Sigma_k p^{*(k)} z^{(k)}(p^*) > 0$. 从而与 Walras 律相矛盾. 于是 $\Sigma_k \max\{0, z^{(k)}(p^*)\} = 0$, 即知 $z^{(k)}(p^*) \leqslant 0, k = 1, 2, \cdots, n$,或 $z(p^*) \leqslant 0$.

参考文献:

[1] BROUWER L E J. Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl[J]. Math. Ann. ,1911(70): 161-165
[2] ARROW K J, DEBREU G. Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy[J]. Econometrica,1954(22): 265-290
[3] DEBREU G. Theory of Value[M]. Wiley,New York,1959
[4] ISTRATESCU V I. Fixed Point Theory (An Introduction)[M]. Reidel,1981
[5] 熊金城. 点击拓扑讲义[M]. 3 版. 北京:高等教育出版社,2003
[6] 王则柯,左再思,李志强. 经济学拓扑方法[M]. 北京:北京大学出版社,2002
[7] 郑权. 经济平衡点的一般理论和求法[J]. 运筹学杂志,1986,6(5): 9-18
[8] 史树中. 一般经济均衡的数学问题[J]. 数学的实践与认识,1986(3):54-56

(下转第 582 页)