文章编号:1672 - 058X(2011)05 - 0489 - 02

Lagrange 中值定理的一个推广

李 勇,罗 瑞,王 玲
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:利用区间序列的性质以及极限基础理论研究了微分中值定理中 ξ 的趋近性质,并证明了 Lagrange 中值定理中当 a,b 相互靠近时其中间值 $\xi \to x_0$ 的渐进性质.

关键词:极限应用;Lagrange 中值定理;区间序列

中图分类号:O13 **文献标志码**: A

关于微分中值定理中 ξ 的趋近趋势,至今已有不少研究成果. 文献[1-3]对中值定理中间值的趋近性质进行了各自的讨论,得到许多有趣的趋势. 此处是在文献[4]思想的基础上,利用文献[5]区间序列的性质来分析微分中值定理的"中间值"$\xi \to x_0$ 的渐进性质.

关于微分中值定理的理论中,一般情况下遵循这样的程序,即先确定某一区间,然后确定在此区间中一定存在一个实数满足中值定理的数学陈述. 但这样的过程不能相逆,最初等的函数($f(x) = x^3$)就能推出矛盾.

在极限逻辑下,以构造区间序列的方式证明了当区间(a,b)趋于很微小时,中间值 ξ 趋于点 x_0. 在较弱的条件下得到函数上任一点至少对应一区间满足中值定理的数学陈述.

为叙述方便,现将 Lagrange 中值定理介绍如下:

设$f(x) \in C_{[a,b]}$,f 在(a,b)内可导,则必存在一点 $\xi \in (a,b)$,使得$f(a) - f(b) = f'(\xi)(b-a)$成立.

命题 1 设函数在$[a,b]$上连续,在(a,b)中可导. 在点 $x_0 \in (a,b)$之某一邻域 $N(x_0,\delta)$内构造区间序列$\{[x'_i, x''_i]\}$,且满足:

i) $\min\{x'_i\} > x_0 - \delta, \forall i = 1,2,\cdots$; ii) $\max\{x''_i\} < x_0 + \delta, \forall i = 1,2,\cdots$; iii) $\bigcap_{i=1}^{\infty}[x'_i, x''_i] = x_0$.

根据 Lagrange 中间值定理知,对于 $\forall i = 1,2,\cdots$,有:

$$\frac{f(x'_i) - f(x''_i)}{x'_i - x''_i} = f'(\xi_i) \quad ,\xi_i \in [x'_i, x''_i] \tag{1}$$

成立.

于是,对于每一个 $i = 1,2,\cdots$所确定的区间$[x'_i, x''_i]$,其对应了一个实数 ξ_i. 可以期望,当区间序列趋于很微小时,实数 ξ_i 趋于点 x_0,即 $\xi_i \to x_0$,$(i \to \infty)$(a. s.).

引理 1 (区间序列的一个性质)

Ⅰ 设$\{[a_n, b_n]\}$是一正区间序列. 如果$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$,在$[a_n, b_n]$上每一个点都具有某个性质 P,则存在一数 γ,使得点到$\{n\gamma\}$中有子序列$\{n_j\gamma\}$,在子列的每一个点 $n_j\gamma$ 处也都具有某个性质 P.

Ⅱ 设$\{[a_n, b_n]\}$是一正区间序列,如果$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,在$[a_n, b_n]$上每一个点都具有某个性质 P,则存在一数 γ,使得点列$\left\{\frac{\gamma}{n}\right\}$中有子列$\left\{\frac{\gamma}{n_j}\right\}$,在子列的每一个点$\frac{\gamma}{n_j}$也都具有某性质 P.

证明见文献[5],引用此引理是为保证区间序列性质的稳定性.

收稿日期:2010 - 10 - 17;**修回日期**:2010 - 12 - 25.

作者简介:李勇(1970 -),男,重庆南川人,硕士研究生,讲师,从事函数空间与调和分析研究.

命题 1 的证明

$$\text{def } \Delta x' = x_0 - x'_i; \quad \Delta x'' = x''_i - x_0; \quad x'x''; \quad \Delta x = \Delta x' + \Delta x''$$

再考虑式(1),当 $i\to\infty$ 时的极限:

$$\lim_{i\to\infty} f'(\xi_i) = \lim_{i\to\infty}\frac{f(x'_i) - f(x''_i)}{x'_i - x''_i} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x'\to 0\\ \Delta x''\to 0}}\frac{f(x_0 - \Delta x') - f(\Delta x'' + x_0)}{\Delta x' + \Delta x''} =$$

$$\lim_{\substack{\Delta x'\to 0\\ \Delta x''\to 0}}\frac{f(x_0 - \Delta x') - f(x_0) + f(x_0) - f(\Delta x'' + x_0)}{\Delta x' + \Delta x''} \tag{2}$$

根据代数基本定理知,存在 $p,q>0$, $p+q=1$, $(p,q)=1$ 满足如下分解:

$$\lim_{\substack{\Delta x'\to 0\\ \Delta x''\to 0}}\left(p\frac{f(x_0 - \Delta x') - f(x_0)}{\Delta x'} + q\frac{f(\Delta x'' + x_0) - f(x_0)}{\Delta x''}\right) =$$

$$p\lim_{\Delta x'\to 0}\left(\frac{f(x_0 - \Delta x') - f(x_0)}{\Delta x'}\right) + q\lim_{\Delta x''\to 0}\left(\frac{f(x_0 + \Delta x'') - f(x_0)}{\Delta x''}\right) =$$

$$pf'_-(x_0) + qf'_+(x_0)$$

由于 f 在点 x_0 可导,知 $f'_-(x_0)$ 与 $f'_+(x_0)$ 相等,于是 $\lim\limits_{i\to\infty} f'(\xi_i) = f'(x_0)$,即 $f'(\xi_i)\to f'(x_0)$, $\Delta x'\to 0$, $\Delta x''\to 0$.

关于此命题的一个检验:设 $f(x)$ 在 x 点可微时,设 $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) + \varepsilon(h,x)$,则 $\varepsilon(h,x)$ 是满足 $h\neq 0$ 的 h 的函数,且 $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h,x) = 0$. 在上述证明过程中,若令 $\Delta x_0(=\Delta x' + \Delta x'') = h$. 即得 $f'(\xi_i) = f'(x) + \varepsilon(h,x)$.

此说明上述论证合乎逻辑.

参考文献:

[1] 李庆玉,席泓. 关于 Lagrange 中值定理的又一种证明[J]. 渝州大学学报:自然科学版,2001(12)1:4-6

[2] 帅雁丹. Lagrange 中值定理“中间点”的渐近性[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2009(10):5-6

[3] 戴立辉. 微分中值定理 ξ 的变化趋势[J]. 工科数学, 1994,10(4):33-35

[4] JULES H P. MATHEMATICS SCIENCE: LAST ESSAYS[M]. New York: Dover Publications,inc, 1963

[5] 赵显曾. 数学分析拾遗[M]. 南京:东南大学出版社,2006

[6] KUNIHIKO K. 微积分入门(Ⅰ)[M]. 裴东河,译. 北京:人民邮电出版社,2008

[7] 李成章,黄玉民. 数学分析(上)[M]. 北京:科学出版社,2004

A Generalization of Lagrange Mean Value Theorem

LI Yong, LUO Rui, WANG Ling

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: By using interval sequence property and the basic theory of limit, the approximation property of ξ in differential mean value theorem is studied, and the approximation property of median $\xi\to x_0$ when a and b are approaching each other in Lagrange mean value theorem is verified.

Key words: application of limit; Lagrange mean value theorem; interval sequence

责任编辑:李翠薇
校　　对:田　静