文章编号:1672 - 058X(2011)05 - 0467 - 03

对称矩阵与 Bezout 矩阵之间关系的探讨*

王金凤, 孙 彬

(安徽大学 数学科学学院,合肥 230039)

摘 要: Bezout 矩阵是关于多项式对的一种特殊二次型. 首先给出几种特殊情形,随后归纳证明在标准基下,满足条件 rank$\nabla A\leqslant 2$ 或 rank$\Delta A\leqslant 2$ 的任意对称矩阵也是 Bezout 矩阵. 在一般基下,任一对称矩阵均可找到由两个多项式生成的 Bezou 矩阵与之对应.

关键词:对称矩阵;Bezout 矩阵;对角化

中图分类号:O151.21 **文献标志码:**A

在文献[1],给出 Bezout 矩阵一定是对称矩阵,则给定任一对称矩阵,能否恒能找到由两个多项式生成的 Bezout 矩阵与之对应. 文献[2]中仅给出了特殊情形:任意对称的准 Bezout 矩阵均是由两个互素多项式生成的. 此处首先给出这种特殊情形,然后归纳在一般基(文献[3])下,任一对称矩阵均可找到由两个多项式生成的 Bezout 矩阵与之对应;在标准基下,满足条件 rank$\Delta A\leqslant 2$ 或 rank $\nabla A\leqslant 2$ 的任意对称矩阵也是 Bezout 矩阵.

矩阵 B 称 quasi-bezoutian,如果满足条件 rank $\nabla_H B\leqslant 2$. 其中 ∇ 表示从 $C^{m\times n}\rightarrow C^{(m+n)\times(n+1)}$ 的一个变换,对于矩阵 $B=[a_{ij}]_0^{m-1}{}_0^{n-1}$ 而言,定义 $\nabla B=[a_{i-1,k}-a_{i,k-1}]$ $(i=0,\cdots,m;k=0,\cdots,n)$.

首先给出一类特殊的对称矩阵满足条件:

定理 1 任意对称的三角矩阵均是由两个特殊多项式生成的 Bezoutian.

证明 当对称矩阵的阶数 $n\leqslant 2$ 时,显然成立. 下面考虑 $n>2$ 的情形:

(i) 当对称矩阵 A 是上三角矩阵时,A 可以表示为 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a & \cdots & a_n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;现约定 $g(\lambda)=1$,则 $f(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^i=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$ 即可,因为此时有 $Bez(f,g)=A$.

(ii) 当 A 是对称的下三角矩阵时,经验证,此时应约定:$g(\lambda)=\lambda^n$,$f(\lambda)=\sum_{i=0}^{n}a_i\lambda^i=a_0+a_1\lambda+\cdots+a_n\lambda^n$ 即可. 注:对任意两个次数为 n 的多项式生成的 Bezout 矩阵,首先它是对称矩阵,其中至少有 $n/2$ 组元素对应相等. 所以剩下 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个元素对应相等个数的方程,而方程中却含有 $2n$ 个未知数(多项式的系数),所以很难找到满足条件的解,相应地不能确定出具体的多项式.

定理 2 任一个对称的准 - Bezout 矩阵均是由两个互素多项式生成的 Bezoutian. 即 $Bez=Bez(a,b)$.

证明 借助于任一 n 阶非零的准 - Bezoutian 矩阵都可以表示为 $B=M_r(p)Bez(u,v)M_r(q)^{\mathrm{T}}$. 其中:$u(t),v(t)\in F^{r+1}(t)$ 且互素,$r\leqslant n$. $M_r(\cdot)$ 表示算子 $M_n(p):F^n\rightarrow F^{m+n}$ 满足 $(M(a)X)(t)=a(t)X(t)$ 在标准基下的矩阵,易得证明.

收稿日期:2010 - 09 - 19;**修回日期:**2010 - 12 - 19.

* **基金项目:**安徽省自然科学基金(09041630).

作者简介:王金凤(1985 -),女,安徽淮北人,硕士研究生,从事矩阵与算子理论研究.

引理 1 任意一个对称矩阵都合同于一个对角矩阵. 即:对任意的对称矩阵 T,则存在可逆矩阵 P,使得 $P^{\mathrm{T}}TP=\Lambda$(Λ 是对角矩阵).

引理 2 假设 $a(\lambda),b(\lambda)\in w^{n+1}(\lambda)$,$w(\lambda)=\alpha a(\lambda)+\beta b(\lambda)$,若 $w(\lambda)$ 有单根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$,则有 $V_n(\lambda)Bez_H(a,b)V_n(\lambda)^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_r)$,其中 $\lambda=(\lambda_i)_1^n$,$\gamma_i=a'(\lambda_i)b(\lambda_i)-a(\lambda_i)b'(\lambda_i)$.

下面从不同角度寻找满足条件的特殊对称矩阵.

1 标准基下的情形

命题 1 一个正则矩阵 A 是 H 矩阵的逆当且仅当 $\mathrm{rank}\,\nabla A=2$. 其中 $\nabla A=[a_{i-1,k}-a_{i,k-1}]$($i=0,1,\cdots,m$;$k=0,1,\cdots,n$).

定理 3 对于任意的对称矩阵 A,若 $\mathrm{rank}\,\nabla A\leqslant 2$,则矩阵 A 是 H-Bezoutian 矩阵.

证明 若 $\mathrm{rank}\leqslant 1$ 时,则 $A=0$,结论显然成立;当 $\mathrm{rank}\,\nabla A=2$ 时,∇A 可以表示为:

$$\nabla A=\begin{bmatrix}0 & 0\\ A & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & A\\ 0 & 0\end{bmatrix}=fg^{\mathrm{T}}-gf^{\mathrm{T}}$$

两边同时考虑生产函数得:

$$(1,x,\cdots,x^n)\left[\begin{pmatrix}0 & 0\\ A & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & A\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1\\ y\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}=f(x)g(y)-g(x)f(y)\Leftrightarrow$$

$$(1,x,\cdots,x^n)\begin{pmatrix}0 & 0\\ A & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ y\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}-(1,x,\cdots,x^n)\begin{pmatrix}0 & A\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ y\\ \vdots\\ y^n\end{pmatrix}=f(x)g(y)-g(x)f(y)\Leftrightarrow$$

$$x(1,x,\cdots,x^{n-1})A\begin{pmatrix}1\\ y\\ \vdots\\ y^{n-1}\end{pmatrix}-y(1,x,\cdots,x^{n-1})A\begin{pmatrix}1\\ y\\ \vdots\\ y^{n-1}\end{pmatrix}=f(x)g(y)-g(x)f(y)\Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x)g(y)-g(x)f(y)}{x-y}=(1,x,\cdots,x^{n-1})A\begin{pmatrix}1\\ y\\ \vdots\\ y^{n-1}\end{pmatrix}$$

即:满足条件的任一对称矩阵 A 均是 Bezout 矩阵. 类似地可以得到下面一个结论.

推论 1 当 $\mathrm{rank}\Delta A\leqslant 2$ 时,对称矩阵 A 也是 T-Bezoutian.

2 一般基下实多项式的情形

对于一般基下的任一对称矩阵,能否找到两个多项式生成的 Bezout 矩阵与其对应,以下给出肯定的证明.

定理 4 一般基下的任一对称矩阵均可找到两个多项式生成的 Bezout 矩阵与之等价.

证明 记范德蒙矩阵 $V(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1}\end{bmatrix}$,若 λ_i 互不相同,则 $V(\lambda)$ 非奇异.

考虑 $V\Lambda V^{\mathrm{T}}$,令 $f(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$,则一定存在一个对角矩阵 $\Lambda_1=\operatorname{diag}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$,使得:

$$\Lambda=\operatorname{diag}(f'(\lambda_1),f'(\lambda_2),\cdots,f'(\lambda_n))\cdot\Lambda_1=$$

$$\operatorname{diag}\begin{pmatrix} f'(\lambda_1)\alpha_1 & & & \\ & f'(\lambda_2)\alpha_2 & & \\ & & 0 & \\ & & & f'(\lambda_n)\alpha_n \end{pmatrix}$$

令 $g(\lambda_i)=\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$,即可求出 $g(\lambda)$.

现在考虑 $B(x,y)=\dfrac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y}=(1,x,\cdots,x^{n-1})B\begin{pmatrix}1\\ y\\ \vdots\\ y^{n-1}\end{pmatrix}$.

因为 $PTP^{\mathrm{T}}=\Lambda,B=V\Lambda V^{\mathrm{T}}$,所以 $PTP^{\mathrm{T}}=V^{-1}B(V^{-1})^{\mathrm{T}},B=VPT(VP)^{\mathrm{T}}$,即 $B(x,y)=(1,x,\cdots,x^{n-1})VPT(VP)^{\mathrm{T}}(1,y,\cdots,y^{n-1})^{\mathrm{T}}$. 令 $(1,x,\cdots,x^{n-1})VP$ 是一组一般基即可.

注:在参考文献[4]中,因不同的多项式对可以生成相同的 Bezoutian,记 $GL(F^2)$ 表示非歧义的 2×2 阶矩阵所组成的群. 令 $u,v,u_1,v_1\in F^{n+1}$,且满足 $[u_1,v_1]=[u,v]\varphi$,其中 $\varphi=\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}\in GL(F^2)$,则 $Bez(u_1,v_1)=(\det\varphi)Bez(u,v)$. 特别地,当 $\det\varphi=1$ 时,$Bez(f',g')$ 与 $Bez(f,g)$ 一致.

3　对称矩阵与 Bezout 矩阵之间的其他联系

由线性空间的概念可知,在复数域上,所有的 $n\times n$ 阶对称矩阵构成了一个维数为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 的线性矩阵空间. 设 $f_0,f_1,\cdots,f_n$ 是 $C^{n+1}(\lambda)$ 一组基,这组多项式基共生成了 $(n+1)^2$ 个 $n\times n$ 阶的 Bezout 矩阵,对任一对称矩阵都可以由其中的 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个线性无关的 Bezout 矩阵线性表示. 但是由 $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 个 Bezout 矩阵线性组合得到的矩阵不一定是 Bezout 矩阵.

4　主要结论

根据 Bezout 矩阵的特点,首先总结给出几类特殊的对称矩阵,这些特殊矩阵总可以找到特定的多项式对生成的 Bezout 矩阵与之对应. 随后给出标准基下满足条件 $\operatorname{rank}\Delta A\geqslant2$ 或 $\operatorname{rank}\nabla A\leqslant2$ 的对称矩阵也有类似性质,最后推广到一般基下,任意的对称矩阵都可以找到两个多项式生成的 Bezout 矩阵与之等价.

参考文献:

[1] HEINIG G, ROST K. Algebric Meffiods for Toeplitz – like Matrices and Operators, Akademie Verlag, Bevlin, and Birknauser, Boston[J]. Mathematics Subject Classification, 1984:29-33

[2] CHEN G N, YANG ZH H. Bezoutian representation via Vander Monde matrices[J]. Linear Algebra and Its Appli, 1993, 186:21-30

[3] HEINIG G, ROST K. Bezoutians[J]. Linear Algebra Appl, 2000:53-57

[4] YANG Z H. Polynomial Bezoutian matrix with respect to a general basisi[J]. Linear Algebra Appl, 2001, 331:167-170

[5] 王其林. 关于"正交矩阵的特征多项式及特征根"的注[J]. 重庆理工大学学报:自然科学版, 2011(4):154-155

(下转第 478 页)