文章编号:1672-058X(2011)05-0463-04

关于不定方程 $x^3-1=434y^2$

陈友艳
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘　要:利用递归数列,同余式证明不定方程 $x^3-1=434y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(1,0),(25,\pm 6)$.

关键词:不定方程;整数解;递归数列;同余式
中图分类号:O155　　**文献标志码**:A

关于不定方程 $x^3\pm 1=Dy^2(D>0)$ 已有不少的研究工作[1-5]. 当 D 无 $6k+1$ 形素因数时,其全部整数解已由柯召、孙琦、曹珍富等人得到. 但是当 D 有 $6k+1$ 形素因数时,方程的求解比较困难. 此处运用递归数列,同余式的方法证明了不定方程 $x^3-1=434y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(1,0),(25,\pm 6)$.

引理 1[1]　不定方程 $x^2-3y^4=1$ 仅有整数解 $(x,y)=(\pm 1,0),(2,1),(7,2)$.

引理 2[1]　不定方程 $4x^4-3y^2=1$ 仅有整数解 $(x,y)=(\pm 1,\pm 1)$.

定理 1　不定方程:

$$x^3-1=434y^2 \tag{1}$$

只有整数解 $(x,y)=(1,0),(25,\pm 6)$.

证明　因为 $(x-1,x^2+x+1)$ 等于 1 或 3,故不定方程给出下列 8 种可能的分解:

(Ⅰ) $x-1=434a^2, x^2+x+1=b^2, y=ab$;　(Ⅱ) $x-1=62a^2, x^2+x+1=7b^2, y=ab$;

(Ⅲ) $x-1=14a^2, x^2+x+1=31b^2, y=ab$;　(Ⅳ) $x-1=2a^2, x^2+x+1=217b^2, y=ab$;

(Ⅴ) $x-1=42a^2, x^2+x+1=93b^2, y=3ab$;　(Ⅵ) $x-1=186a^2, x^2+x+1=21b^2, y=3ab$;

(Ⅶ) $x-1=1302a^2, x^2+x+1=3b^2, y=3ab$;　(Ⅷ) $x-1=6a^2, x^2+x+1=651b^2, y=3ab$.

以下分别讨论这 8 种情况所给的式(1)的解.

(Ⅰ) 由 $x^2+x+1=b^2$,得 $x=0$ 或 -1,代入 $x-1=434a^2$ 均不适合,该情形无式(1)的解.

(Ⅱ) 由 $x-1=62a^2$ 得 $x\equiv 1,7\pmod 8$,代入 $x^2+x+1=7b^2$ 得 $b^2\equiv 5,7\pmod 8$,此不可能,故该情形无式(1)的整数解.

(Ⅲ) 由 $x-1=14a^2$ 得 $x\equiv 1,7\pmod 8$,代入 $x^2+x+1=31b^2$ 得 $b^2\equiv 5,7\pmod 8$,此不可能,故该情形无式(1)的整数解.

(Ⅳ) 由 $x-1=2a^2$ 得 $x\equiv 1,3\pmod 8$,代入 $x^2+x+1=217b^2$ 得 $b^2\equiv 3,5\pmod 8$,此不可能,故该情形无式(1)的整数解.

(Ⅴ) 由 $x-1=42a^2$ 得 $x\equiv 1\pmod 7$,代入 $x^2+x+1=93b^2$ 得 $b^2\equiv 5\pmod 7$,此不可能,故该情形无式(1)的整数解.

(Ⅵ) 由 $x^2+x+1=21b^2$ 得 $(2x+1)^2-21(2b)^2=-3$,把 $x-1=186a^2$ 代入得 $(372a^2+3)^2-21(2b)^2=-3$,又 $X^2-21Y^2=-3$ 只有一个结合类解,从而有:

$$(372a^2+3)+2b\sqrt{21}=x_n+y_n\sqrt{21}=$$
$$(9+2\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=(9+2\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n$$

收稿日期:2010-10-28;**修回日期**:2010-12-03.

作者简介:陈友艳(1987-),女,山东临沂人,硕士研究生,从事计算数论方面的研究.

这里 $n\in z$,其中 $9+2\sqrt{21}$是 pell 方程 $X^2-21Y^2=-3$ 的基本解,$55+12\sqrt{21}$是 pell 方程 $X^2-21Y^2=1$ 的基本解.

于是有 $x_n=372a^2+3$,易验证下列关系成立:

$$u_{n+2}=110u_{n+1}-u_n,u_0=1,u_1=55$$
$$v_{n+2}=110v_{n+1}-v_n,v_0=0,v_1=12$$
$$x_n=9u_n+2\times 21v_n$$

采用对序列$\{x_n\}$取模的方式来证明.

对递归数列$\{x_n\}$取模 5,11,剩余类序列周期为 4,当 $n\equiv 0,1(\bmod 4)$时,有 $x_n\equiv 4(\bmod 5)$,即 $2a^2\equiv 1(\bmod 5)$,这不可能. 剩下 $n\equiv 2,3(\bmod 4)$. 当 $n\equiv 2,3(\bmod 4)$时,有 $x_n\equiv 2(\bmod 11)$,即 $9a^2\equiv -1(\bmod 11)$,这不可能. 故此情形无式(1)的整数解.

(Ⅶ) 由 $x^2+x+1=3b^2$ 得$(2x+1)^2-3(2b)^2=-3$,把 $x-1=1\ 302a^2$ 代入得$(2b)^2-3(868a^2+1)^2=1$,故有$|2b|+(868a^2+1)\sqrt{3}=(x_n+y_n\sqrt{3})=(2+\sqrt{3})^n,n\geqslant 1$. 其中 $2+\sqrt{3}$是 pell 方程 $X^2-3Y^2=1$ 的基本解. 故有:

$$868a^2+1=y_n \tag{2}$$

易验证下列递推关系式成立:$x_n=4x_{n-1}-x_{n-2},x_0=1,x_1=2;y_n=4y_{n-1}-y_{n-2},y_0=0,y_1=1;x_n=2x_{n-1}+3y_{n-1},y_n=x_{n-1}+2y_{n-1};x_{2n}=x_n^2+3y_n^2,y_{2n}=2x_ny_n$.

如果 $2|n$,那么 $2|y_n$,由式(2)$1\equiv 0(\bmod 2)$,这不可能;如果 $n\equiv 3(\bmod 4)$,有 $y_n\equiv 7(\bmod 8)$,由式(2)有 $2a^2\equiv 3(\bmod 4)$,这也不可能. 所以必有 $n\equiv 1(\bmod 4)$. 令 $n=4m+1$,有:

$$868a^2=y_{4m+1}-1=x_{4m}+2y_{4m}-1=x_{2m}^2+3y_{2m}^2+4x_{2m}y_{2m}-1=$$
$$6y_{2m}^2+4x_{2m}y_{2m}=2y_{2m}(3y_{2m}+2x_{2m})=2y_{2m}x_{2m+1}$$

即 $434a^2=y_{2m}x_{2m+1}$.

又$(y_{2m},x_{2m+1})=(y_{2m},3y_{2m}+2x_{2m})=(y_{2m},2x_{2m})=2$,所以有下列情形之一成立:

$$x_{2m+1}=s^2,y_{2m}=434t^2 \tag{3}$$
$$x_{2m+1}=434s^2,y_{2m}=t^2 \tag{4}$$
$$x_{2m+1}=2s^2,y_{2m}=217t^2 \tag{5}$$
$$x_{2m+1}=217s^2,y_{2m}=2t^2 \tag{6}$$
$$x_{2m+1}=7s^2,y_{2m}=62t^2 \tag{7}$$
$$x_{2m+1}=62s^2,y_{2m}=7t^2 \tag{8}$$
$$x_{2m+1}=31s^2,y_{2m}=14t^2 \tag{9}$$
$$x_{2m+1}=14s^2,y_{2m}=31t^2 \tag{10}$$

其中 $a=st;s,t\in z$. 由于 $n\equiv 1(\bmod 2)$时,$x_n\equiv 2(\bmod 4)$,由式(3)的前式得 $s^2\equiv 2(\bmod 4)$,此不可能,故式(3)无解. 同理可得式(6)(7)(9)无解. 由式(4)的 $y_{2m}=t^2$ 得 $x_{2m}^2-3t^4=1$,由引理 1 知 $t=\pm 1,\pm 2,0$,即 $y_{2m}=1,4,0,m=0,1$ 都不满足式(4)的前式,故式(4)无解. 由式式(5)的 $x_{2m+1}=2s^2$ 得 $4s^4-3y_{2m+1}^2=1$,由引理 2 知:$y_{2m+1}=\pm 1$,即 $m=0,-1$. 但当 $m=-1$ 时不适合(5)的后式,而当 $m=0$ 时,有 $y_0=217t^2$,即 $t=0$ 从而$a=0$,这就给出了(1)的平凡解$(x,y)=(1,0)$. 对于式(8),当 $n\equiv 1(\bmod 2)$时,有 $x_n\equiv 2,5,10,11,20,21,26,29(\bmod 31)$,即 $0\equiv 2,5,10,11,20,21,26,29(\bmod 31)$,矛盾,故式(8)无解. 对于式(10),当 $n\equiv 1(\bmod 2)$时,有 $x_n\equiv 2,12(\bmod 14)$,即 $0\equiv 2,12(\bmod 14)$,矛盾. 故式(10)无解.

故该情形给出了式(1)的平凡解$(x,y)=(1,0)$.

(Ⅷ) 由 $x^2+x+1=651b^2$ 得$(2x+1)^2-651(2b)^2=-3$,把 $x-1=6a^2$ 代入得$(12a^2+3)^2-651(2b)^2=-3$,又 $X^2-651Y^2=-3$ 只有一个结合类解,从而有:

$$(12a^2+3)+2b\sqrt{651}=x_n+y_n\sqrt{651}=$$
$$(51+2\sqrt{651})(u_n+v_n\sqrt{651})=$$
$$(51+2\sqrt{651})(1735+68\sqrt{651})^n$$

这里 $n\in z$，其中 $51+2\sqrt{651}$ 是 pell 方程 $X^2-651Y^2=-3$ 的基本解，$1\,735+68\sqrt{651}$ 是 pell 方程 $X^2-651Y^2=1$ 的基本解.

于是有 $x_n=12a^2+3$，即 $(12a)^2=12(x_n-3)$，易验证下列关系成立：

$$\begin{aligned} u_{n+2}&=3\,470u_{n+1}-u_n, u_0=1, u_1=1\,735\\ v_{n+2}&=3\,470v_{n+1}-v_n, v_0=0, v_1=68\\ x_n&=51u_n+2\times651v_n\end{aligned}\tag{11}$$

采用对序列 $\{x_n\}$ 取模的方式来证明.

对递归数列 $\{x_n\}$ 取模 5，剩余类序列周期为 4，当 $n\equiv2,3\pmod 4$ 时，有 $x_n\equiv4\pmod 5$，由 $x_n=12a^2+3$ 有 $2a^2\equiv1\pmod 5$，这不可能，剩下 $n\equiv0,1\pmod 4$.

为简便，以下对 $\{x_n\}$ 取模时均略去对其剩余类序列周期的陈述，这实际上可从排除的剩余类所对应的模看出. 模 11 排除 $n\equiv1,4\pmod{12}$，此时 $12a^2\equiv6\pmod{11}$，剩下 $n\equiv0,5,8,9\pmod{12}$. 同理，对 $\{x_n\}$ 取模 59，23，193，得到 $n\equiv0\pmod{24}$. 类似可以得到：对 $\{x_n\}$ 分别取模 71，169 639，可得 $n\equiv0\pmod{10}$. 对 $\{x_n\}$ 分别取模 29，20 047，839，32 423，可得 $n\equiv0\pmod{56}$. 综上取模过程可得：

$$\begin{cases} n\equiv0\pmod{24}\\ n\equiv0\pmod{10}\\ n\equiv0\pmod{56}\end{cases}$$

由孙子定理可得 $n\equiv0\pmod{3\,360}$. 若 $n\neq0$，则可令 $n=2\times2^r\times3\times5\times7\times l$，其中 $r\geqslant2$，$2\nmid l$，易知对 $\{2^r\}$ 取模 102，可得周期为 8 的剩余类序列. 故令：

$$m=\begin{cases}3\cdot2^r, & r\equiv0,1,2,4,5,7\pmod 8\\ 15\cdot2^r, & r\equiv6\pmod 8\\ 35\cdot2^r, & r\equiv3\pmod 8\end{cases}$$

此时 $m\equiv6,12,24,48,54,78,90,96\pmod{102}$，记 $n=2\mathrm{km}l$，其中 k 为奇数. 从而有 $x_n=x_{2m+(kl-1)\cdot2m}\equiv\pm x_{2m}\pmod{u_{2m}}$. 若 $x_n\equiv x_{2m}\pmod{u_{2m}}$，当 $m\equiv0\pmod 4$ 时，$u_m\equiv1\pmod 8$，$v_m\equiv0\pmod 8$，$u_{2m}\equiv u_m^2+651v_m^2\equiv1\pmod 8$，于是有：

$$\left(\frac{12(x_n-3)}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{12(x_{2m}-3)}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{12(51u_{2m}+1\,302v_{2m}-3)}{u_{2m}}\right)=$$

$$\left(\frac{24\times651v_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{3v_m+2u_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{3v_m+2u_m}{u_m^2+651v_m^2}\right)=$$

$$\left(\frac{\frac{3}{2}v_m+u_m}{u_m^2+651v_m^2}\right)=\left(\frac{u_m^2+651v_m^2}{\frac{3}{2}v_m+u_m}\right)=\left(\frac{2\,613}{\frac{3}{2}v_m+u_m}\right)=-\left(\frac{3v_m+2u_m}{2\,613}\right)$$

对 $\{3v_m+2u_m\}$ 取模 2 613 得周期为 102 的剩余类序列. 当 $m\equiv6,12,24,48,54,78,90,96\pmod{102}$ 时，有 $\left(\frac{3v_m+2u_m}{2\,613}\right)=1$，从而 $\left(\frac{12(x_n-3)}{u_{2m}}\right)=-1$，矛盾.

若 $x_n\equiv-x_{2m}\pmod{u_{2m}}$，则类似地有：

$$\left(\frac{12(x_n-3)}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{12(-x_{2m}-3)}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{12(-51u_{2m}-1\,302v_{2m}-3)}{u_{2m}}\right)=$$

$$\left(\frac{24\times651v_m}{u_{2m}}\right)\left(\frac{3v_m-2u_m}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{3v_m-2u_m}{u_m^2+651v_m^2}\right)=\left(\frac{\frac{3}{2}v_m-u_m}{u_m^2+651v_m^2}\right)=$$

$$\left(\frac{u_m^2+651v_m^2}{\frac{3}{2}v_m-u_m}\right)=\left(\frac{2\,613}{\frac{3}{2}v_m-u_m}\right)=-\left(\frac{3v_m-2u_m}{2\,613}\right)$$

此时只需令：

$$m=\begin{cases}3\cdot 2^r, r\equiv 0,1,3,4,5,6(\bmod 8)\\ 15\cdot 2^r, r\equiv 2(\bmod 8)\\ 35\cdot 2^r, r\equiv 7(\bmod 8)\end{cases}$$

则相应可得到$\left(\frac{12(x_n-3)}{u_{2m}}\right)=-1$,矛盾.

所以 $n=0$,从而 $12a^2+3=x_0=51$,$a=\pm 2$,由此可得 $x=25$,$y=\pm 6$. 该情形给出式(1)的整数解$(x,y)=(25,\pm 6)$.

综合上述情形的讨论结果,不定方程 $x^3-1=434y^2$ 仅有整数解$(x,y)=(1,0)$,$(25,\pm 6)$.

参考文献:

[1] 曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989

[2] 罗明,黄勇庆. 关于不定方程 $x^3-1=26y^2$[J]. 西南大学学报:自然科学版,2007,29(6):5-7

[3] 黄勇庆,廖江东. 关于不定方程 $x^3\pm 8=35y^2$[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2006(5):462-464

[4] 柯召,孙琦. 数论讲义[M]. 北京:高等教育出版社,1987

On Diophantine Equation $x^3-1=434y^2$

CHEN You-yan

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: In this paper, the author has proved that the Diophantine equation $x^3-1=434y^2$ has only integer solution $(x,y)=(1,0)$,$(25,\pm 6)$ by using recurrent sequence and congruence expression.

Key words: Diophantine equation; integer solution; recurrent sequence; congruence expression

责任编辑:李翠薇

(上接第 462 页)

Uniform Convergence of the Generalized Integral with Parameters

ZHAO Wen-qiang

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The uniform convergence of the generalized integral with parameters is studied. The sufficient and necessary condition of uniform convergence is given based on the definition of the uniform convergence, and Cauchy test, differential method and series method of discriminating the uniform convergence are also given. The proofs and practical examples are also covered.

Key words: generalized integral with parameter; uniform convergence; Cauchy test; differential method; series discriminating method

责任编辑:李翠薇