文章编号:1672 - 058X(2011)05 - 0458 - 05

关于含参量广义积分一致收敛性的教学研究

赵 文 强

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:对含参量广义积分的一致收敛性给予讨论,从一致收敛的定义出发给出一致收敛的充要条件,以及判断一致收敛的柯西判别法、微分法和级数判别法,并给出证明和运用实例.

关键词:含参量广义积分;一致收敛;柯西判别法;微分法;级数判别法

中图分类号:O172.2　　**文献标志码**:A

无穷级数是构造新函数的一种重要工具,利用它可以构造出一些用通常解析式无法表达的函数,这些函数具有很重要的特性,比如利用无穷级数可以构造出处处连续而处处不可微的函数. 含参量积分是构造新函数的另一重要工具,就是用积分形式表示的函数,比如欧拉积分等,在数理方程和概率论中经常出现这样的函数. 因此学习好含参量积分及其性质具有重要的意义. 在有限区间上的连续函数的含参量积分具有很好的分析性质,并且极限与积分,求导与积分,积分与积分都可以交换顺序. 于是,人们期望这种情况在其他情形的含参量积分也具备,但是对于含参量广义积分的情形,事情就没有那么简单了,这需要广义积分和被积函数具有比连续更好的性质,这就是教材中引出一致收敛概念的原因. 在一致收敛意义下,极限与积分、求导与积分、积分与积分都可以交换顺序. 于是判断含参量广义积分的一致收敛性变得尤为重要. 一般的分析教材中只是给出了 M - 判别法,阿贝尔判别法和狄利克雷判别法,显然这些方法是有限的,很多含参量广义积分是否一致收敛很难方便确定. 此处从含参量广义积分一致收敛的定义出发,与广义积分收敛性判别法对照,得到了含参量广义积分一致收敛的柯西判别法、微分法和级数判别法,并给出证明和应用供参考. 其实这些方法的原理简单,学生也容易掌握. 这里主要考虑如下定义的含参量无穷限广义积分,至于无界函数的含参量广义积分有类似结果,这里不再赘述.

规定 I 表示实数轴上的区间,可以有限,也可以无限. 首先给出含参量广义积分和一致收敛两个概念.

定义 1　设 $f(x, y)$ 定义在无界区域 $R = [a, +\infty) \times I$ 上, 若对每个固定的 $y \in I$, 广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x, y)\mathrm{d}x$ 都收敛,则它是 y 在 I 上取值的函数,记作 $I(y)$, 即:

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x, y \in I$$

$I(y)$ 称为含参数 $y \in I$ 的无穷限广义积分, 简称含参量广义积分.

定义 2　若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在常数 $A_0 = A_0(\varepsilon)$, 当 A', $A \geqslant A_0$ 时,对一切 $y \in I$, 成立:

$$\left| \int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \text{ 或者 } \left| \int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x \right| < \varepsilon$$

则称含参量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y \in I$ 为一致收敛.

收稿日期:2010 - 10 - 08;**修回日期**:2010 - 10 - 25.

作者简介:赵文强(1969 -), 男,四川南江人,博士研究生,从事泛函分析及应用研究.

1　一致收敛的充要条件

由定义 2,不难得出如下直接估计广义积分尾部来判断一致收敛的方法.

含参量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y \in I$ 一致收敛的充要条件是:

$$\lim_{M\to+\infty} \sup_{y\in I} \left| \int_M^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| = 0$$

例 1　证明含参量广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x$ 关于 y 在任何$[a, +\infty)$上一致收敛,但在$(-\infty, +\infty)$上非一致收敛.

解　注意到对充分大的 $M>0$,有:

$$\sup_{y\in[a,+\infty)} \left| \int_M^{+\infty} \frac{y}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x \right| = \sup_{y\in[a,+\infty)} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan yM \right) = \frac{\pi}{2} - \arctan aM$$

而 $\lim_{M\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan aM \right) = 0$,所以由上述充要条件知$\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x$ 在任何$[a, +\infty)$上一致收敛. 但是:

$$\sup_{y\in(-\infty,+\infty)} \left| \int_M^{+\infty} \frac{y}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x \right| = \sup_{y\in(-\infty,+\infty)} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan yM \right) = \pi$$

因此由上述充要条件知 $\int_0^{+\infty} \frac{y}{1+x^2y^2}\mathrm{d}x$ 在$(-\infty, +\infty)$上非一致收敛.

例 2　判断含参量广义积分 $\int_0^{+\infty} 2xy\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x$ 关于 y 在任何区间$(-a, a)$上的一致收敛性.

解　因为对充分大的 $M>0$,有:

$$\sup_{y\in(-a,a)} \left| \int_M^{+\infty} 2xy\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x \right| = \sup_{y\in(-a,a)} \mathrm{e}^{-M^2y} = 1$$

所以

$$\lim_{M\to+\infty} \sup_{y\in(-a,a)} \left| \int_M^{+\infty} 2xy\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x \right| \neq 0$$

因此由上述充要条件知 $\int_0^{+\infty} 2xy\,\mathrm{e}^{-x^2y}\mathrm{d}x$ 在任何区间$(-a, a)$上非一致收敛.

2　柯西判别法

引理 1　设$f(x,y)$与 $F(x,y)$定义在无界区域 $R=[a, +\infty)\times I$ 上. 如果存在 $a'>a$ 使得:

$$|f(x,y)| \leqslant F(x,y),\ x>a',y\in I \tag{1}$$

并且 $\int_a^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in I$ 一致收敛,则$\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in I$ 一致收敛.

证明　由于 $\int_a^{+\infty} F(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 $y\in I$ 一致收敛, 由定义 2, 任意给定的 $\varepsilon>0$, 存在常数 $A'_0 = A'_0(\varepsilon)$, 当 A', $A \geqslant A'_0$ 时,对一切 $y\in I$, 成立 $\int_A^{A'} f(x,y)\,\mathrm{d}x<\varepsilon$. 取 $A_0=\max\{a', A'_0\}$,则由式(1)得到:当 A', $A\geqslant A_0$ 时,对一切 $y\in I$,有:

$$\int_A^{A'} \left| f(x,y) \right| \mathrm{d}x < \int_A^{A'} F(x,y)\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

于是引理得证.

引理 2　设$f(x,y)$,$\varphi(x,y)$定义在无界区域 $R=[a, +\infty)\times I$ 上. 记$\left| \frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)} \right| = q(x,y)$. 如果 $\varphi(x,$

y)和 $q(x,y)$满足:1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\limits_{y\in I} q(x,y)=q$, $0\leqslant q<+\infty$;2) 反常积分 $\int_a^{+\infty}\varphi(x,y)\mathrm{d}x$ 一致收敛. 那么$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in I$ 一致收敛且绝对收敛.

证明 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{sum}_{y\in I} q(x,y)=q$,根据极限的有界性知存在 $a'>a$, 使得当 $x>a'$时, 对一切的 $y\in I$, $q(x,y)\leqslant M$, 其中 M 为一正常数. 于是当 $x>a'$时,有$|f(x,y)|\leqslant M\varphi(x,y)$. 于是由引理 1,结果得证.

由于 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$, $a>0$, $p>1$ 收敛,于是在上述定理中让 $\varphi(x,y)=\frac{1}{x^p}$, $p>1$,则得出了一个有效的判别法, 不妨称为柯西判别法.

柯西判别法 设 $f(x,y)$ 定义在无界区域 $R=[a,+\infty)I$ 上. 如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\limits_{y\in I}|x^p f(x,y)|=q$,其中 $0\leqslant q<+\infty$, $p>1$. 那么$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in I$ 一致收敛且绝对收敛.

例 3 判断含参量积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 对于 α 在$[\alpha_0,+\infty)$范围上的一致收敛性.

解 注意到 对于 $\alpha\in[\alpha_0,+\infty)$,有$|x^2\mathrm{e}^{-\alpha x}|\leqslant\frac{x^2}{\mathrm{e}^{\alpha_0 x}}$,而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\mathrm{e}^{\alpha_0 x}}=0$. 根据函数极限的有界性,存在正数 M,使得$\left|\frac{x^2}{\mathrm{e}^{\alpha_0 x}}\right|\leqslant M$. 于是 对于充分大的 x 有 $\left|x^2\mathrm{e}^{-\gamma x}\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant M\left|\frac{\sin x}{x}\right|$. 并且:

$$\lim_{x\to+\infty}\sup_{\alpha\geqslant\alpha_0}\left|x^2\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\right|\leqslant M\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\sin x}{x}\right|=0$$

这里 $q=2>1$. 因此含参量积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ 对于 α 在$[\alpha_0,+\infty)$ 范围上一致收敛.

3 微分法

定理 1 设函数$f(x,y)$定义在无界区域 $R=[a,+\infty)\times[c,d]$上,且对 y 的偏导数$f_y(x,y)$存在. 若下列条件满足:

1) 对每一个 $y\in[c,d]$, 广义积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 收敛.

2) 存在常数 $M>0$, 使得对任意 $b>0$ 及所有的 $y\in[c,d]$,恒有 $\left|\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant M$, 即$\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 b 及 $y\in[c,d]$ 一致有界.

则含参量广义积分 $\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

证明 由于$[c,d]$为有限闭区间,所以是紧的. 根据有限覆盖定理,对任意的$\varepsilon>0$, 一定存在有限个点 $c=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=d$,使得$[c,d]=\cup_{i=1}^n[y_{i-1},y_i]$ 且 $y_i-y_{i-1}<\varepsilon$. 由于 广义积分$\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 收敛,于是 对任意的 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$, 都存在 $A_0(\varepsilon,y_i)$, 使得对任意的 $A,A'>A_0(\varepsilon,y_i)$ 有:

$$\left|\int_A^{A'}f(x,y_i)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon,\ i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

另一方面,对任意的 $y\in[c,d]$, 一定存在一点 y_i, 使得$|y-y_i|<\varepsilon$. 令 $A_0=\max\{|A_0(\varepsilon,y_i)|,\ i=1,2,\cdots,n\}$, 则 A_0 只与 ε 有关. 同时对任意的 $A,A'>A_0$,式(2)必然成立. 于是根据微分学中值定理及式(2)有:

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{A'}f(x,y)\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_A^{A'}(f(x,y)-f(x,y_i)+f(x,y_i))\mathrm{d}x\right|\leqslant\\ &\left|\int_A^{A'}(f(x,y)-f(x,y_i))\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{A'}f(x,y_i)\mathrm{d}x\right|=\\ &\left|\int_A^{A'}f_y(x,\xi)(y-y_i)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{A'}f(x,y_i)\mathrm{d}x\right|\leqslant\\ &\left(\left|\int_a^{A}f_y(x,\xi)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^{A'}f_y(x,\xi)\mathrm{d}x\right|\right)|y-y_i|+\varepsilon\leqslant(2M+1)\varepsilon\end{aligned}$$

即含参量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

如果将定理 1 中的条件 1)变弱,则条件 2)会变强. 得如下定理:

定理 2　设函数 $f(x,y)$ 定义在无界区域 $R=[a,+\infty)\times[c,d]$ 上,且关于 $y\in[c,d]$ 可微. 若满足如下条件:

1)存在一点 $y_0\in[c,d]$,使得广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛;2)$\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\mathrm{d}x$ 于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

则含参量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

证明　先考虑在区间 $[y_0,d]$ 上的一致收敛性. 对任意 $y\in[y_0,d]$,在 $[y_0,y]\subset[c,d]$ 上,对每一个 $x\in[0,+\infty)$,有:

$$f(x,y)-f(x,y_0)=\int_{y_0}^{y} f_y(x,y)\mathrm{d}x \tag{3}$$

由已知 $\int_a^{+\infty} f(x,y_0)\mathrm{d}x$ 收敛,于是对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $A_0(\varepsilon,y_0)$,使得对任意的 $A,A'>A_0(\varepsilon,y_0)$,有:

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4}$$

另一方面,由已知 $\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛,当然 $\int_a^{+\infty} f_y(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $[y_0,d]$ 上也是一致收敛的. 所以对任意的 $y\in[y_0,d]$,存在 $A_1(\varepsilon)$,使得对任意的 $A,A'>A_1(\varepsilon)$,有:

$$\left|\int_A^{A'} f_y(x,y)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2(d-y_0)} \tag{5}$$

令 $A_0=\max\{A_0(\varepsilon,y_0),A_1(\varepsilon)\}$,则对任意的 $A,A'>A_0$,式(4)和式(5)都同时成立. 于是由式(3),再结合式(4)和式(5),有:

$$\begin{aligned}\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\right| &= \int_A^{A'}\left(f(x,y_0)-\int_{y_0}^{y} f_y(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\,\Bigg|\leqslant\\ &\left|\int_A^{A'} f(x,y_0)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{A'}\int_{y_0}^{y} f_y(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x\right|\\ &\frac{\varepsilon}{2}+\int_{y_0}^{y} y\left|\int_A^{A'} f_y(x,y)\mathrm{d}x\right|\mathrm{d}y\leqslant\\ &\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2(d-y_0)}(y-y_0)\leqslant\\ &\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

即含参量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 在 $y\in[y_0,d]$ 上一致收敛. 同理可证明在 $[c,y_0]$ 上一致收敛. 从而含参量广义积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$ 关 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛.

例 4　判断含参量广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\cos 2xy\,\mathrm{d}x$ 在 $y\in(-\infty,+\infty)$ 范围上的一致收敛性,其中 $\alpha>0$.

解　由于对固定的 $y\in R$,当 $x\to+\infty$ 时,$x^2\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\cos 2xy=\dfrac{x^2}{\mathrm{e}^{\alpha^2x^2}}\cos 2xy\to 0$,于是对固定的 $y\in R$,广义积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\cos 2xy\,\mathrm{d}x$ 收敛. 另一方面,考虑积分 $\int_0^{+\infty} f_y(x,y)\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\cos 2xy\,\mathrm{d}x$,这里 $f(x,y)=\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\cos 2xy$. 由于当 $x\to+\infty$ 时,$\sup\limits_{y\in(-\infty,+\infty)}\left|x^2.\,x\mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\sin 2xy\right|=\dfrac{x^3}{\mathrm{e}^{\alpha^2x^2}}\to 0$. 所以由一致收敛的柯西判别法

$\int_0^{+\infty} f_y(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in (-\infty, +\infty)$ 范围上一致收敛,由定理2知,$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha^2x^2}\cos 2xy\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in (-\infty, +\infty)$ 范围上一致收敛.

4 级数判别法

定理3 设函数 $f(x,y)$ 为定义在无界区域 $R=[1, +\infty)\times I$ 上的非负函数. 如果 $f(x,y)$ 关于 x 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减,那么含参量广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 与函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n, y)$ 关于 y 在区间 I 上具有同样的一致收敛性.

证明 首先由已知条件中的单调性,对任意固定的 $y\in I$ 和 $n\geqslant 2$, 下式一定成立:

$$f(n+1, y) \leqslant \int_n^{n+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x \leqslant f(n, y) \tag{6}$$

首先假设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n, y)$ 关于 y 在区间 I 上一致收敛. 于是对任意的 $\varepsilon>0$, 总存在 $N>0$, 当 $n>N$ 时,对一切的 $y\in I$ 及任意自然数 p 有:

$$|f(n+1, y)+f(n+2, y)+\cdots+f(n+p, y)| < \varepsilon \tag{7}$$

取 $A_0=N+1$. 对任意的 $A, A'>A_0$, 令 $n'+1=[A]$, $n'+p=[A']$,显然 $n'>N$. 于是由式(6)及式(7)可得:

$$\left|\int_A^{A'} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{n'+1}^{n'+p+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\left|\int_{n'+1}^{n'+2} f(x, y)\,\mathrm{d}x+\int_{n'+2}^{n'+3} f(x, y)\,\mathrm{d}x+\cdots+\int_{n'+p}^{n'+p+1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant$$

$$\left|f(n'+1, y)+f(n'+2, y)+\cdots+f(n'+p, y)\right| \leqslant \varepsilon$$

因此由定义2可知,含参量广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在区间 I 上一致收敛. 类似的过程可以证明结论的另一方面.

例5 设 $f(x,y)=\dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^3}$,讨论含参量广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[0, 1]$ 上的一致收敛性.

解 方法1:容易验证 $f(x,y)$ 非负且关于 x 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减. 考虑函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n^2y^2)}{n^3}$,其中 $y\in[0, 1]$. 由于 $\left|\dfrac{\ln(1+n^2y^2)}{n^3}\right| \leqslant \dfrac{\ln(1+n^2)}{n^3}$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\dfrac{\ln(1+n^2)}{n^3}=0$,从而 $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n^2)}{n^3}$ 收敛. 于是由函数项级数一致收敛的 M - 判别法知,$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+n^2y^2)}{n^3}$ 关于 y 在 $[0, 1]$ 上一致收敛. 因此按定理3,含参量广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

方法2:因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sup\left|x^2\dfrac{\ln(1+x^2y^2)}{x^3}\right| = \lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}\right|=0$,所以由柯西判别法知,含参量广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

参考文献:

[1] 陈传璋. 数学分析(下)[M]. 北京:高等教育出版社,1985

[2] 华东师范大学. 数学分析(下)[M]. 北京:高等教育出版社,2008

[3] 赵文强,宋树枝. 积分算子半群的逼近与表示[J]. 2007,24(5):427-430

(下转第466页)