文章编号:1672-058X(2011)05-0449-04

对称矩阵与正交矩阵的推广及其应用*

郭 伟
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:给出 O-广义(反)对称矩阵、O-广义正交矩阵的定义,研究了它们的性质及两者之间的关系,特别将正交矩阵的广义 Gayley 分解推广到了 O-广义正交矩阵上;利用两者的关系给出了一种矩阵方程的解及解的表示式,获得了许多新结果.

关键词:全转置矩阵;O-对称矩阵;O-广义正交矩阵;矩阵方程;解
中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A

对称矩阵、正交矩阵在信息论、优化理论、线性系统、矩阵方程论、控制论等在诸多领域中都有广泛应用,对它们的研究已取得了丰富的成果[1-7]. 在这些研究中,有从主对角线方向考虑问题,也有从次对角线方向考虑的. 既考虑主对角线也考虑次对角线,进一步提出了 O-广义(反)对称矩阵,O-广义正交矩阵的概念,研究了它们的性质及相互之间的关系,推广了(反)对称矩阵、正交矩阵的相应结果,特别将正交矩阵的广义 *Cayley* 分解推广到了 O-广义正交矩阵上,进一步利用两者之间的关系给出了矩阵方程 $XAY=A$ 的解及解的表示式,取得了许多新结果. 这对丰富矩阵理论以及对于应用无疑都是有价值的. 文中 $R^{n\times n}$ 表示 $n\times n$ 实矩阵集;R_n^n 表示 n 阶可逆实矩阵集;A^{T},A^{-},$|A|$ 分别表示 A 的转置阵、次转置阵、行列式;J 表示次对角线元素全为 1,其余元素为 0 的 n 阶方阵;E 表示 n 阶单位阵.

定义 1[1] 设 $A=(a_{ij})\in R^{m\times n}$, 如果 $B=(A^{\mathrm{T}})^{-}$,则称 B 是 A 的全转置矩阵, 记为 $B=A^{o}$.

定义 2 设 $A\in R^{n\times n}$, 如果存在 $S\in R_n^n$,使得 $A^{o}S=SA(-SA)$,则称 A 为由 S 确定的 O-广义(反)对称矩阵,记为 $A\in S^{+}(S^{-})$.

定义 3 设 $A\in R^{n\times n}$, 如果存在 $S\in R_n^n$,使得 $A^{o}SA=S$,则称 A 为由 S 确定的 O-广义正交矩阵,记 $A\in P(S)=\{A\in R^{n\times n}\mid A^{o}SA=S\}$.

显然, 若 $S=E$,则 A 即为文献[1]的 O-正交矩阵.

引理 1[1] 1) $(A+B)^{o}=A^{o}+B^{o}$,$(AB)^{o}=A^{o}B^{o}$,$(A^{\mathrm{T}})^{o}=(A^{o})^{\mathrm{T}}$;2) 如 $A\in R_n^n$,则 $(A^{-1})^{o}=(A^{o})^{-1}$,$(A^{o})^{o}=A$;3) $A^{o}=(A^{-})^{\mathrm{T}}=(A^{\mathrm{T}})^{-}=JAJ$;4) $|A^{o}|=|A|$.

引理 2 $(A^{\mathrm{T}})^{o}=A^{-}$,$(A^{-})^{o}=A^{\mathrm{T}}$.

证明 $(A^{\mathrm{T}})^{o}=(A^{o})^{\mathrm{T}}=(JAJ)^{\mathrm{T}}=JA^{\mathrm{T}}J=A^{-}$;$(A^{-})^{o}=(JA^{\mathrm{T}}J)^{o}=J^{o}(A^{\mathrm{T}})^{o}J^{o}=JA^{-}J=A^{\mathrm{T}}$.

1 性质及关系

定理 1 1) 如果 A、$B\in S^{+}(S^{-})$,则 $(A+B)\in S^{+}(S^{-})$,$kA\in S^{+}(S^{-})$;2) 若 A、$B\in S^{+}(S^{-})$,则 $AB\in S^{+}$;若 $A\in S^{+}$,$B\in S^{-}$,则 $AB\in S^{-}$;3) 若 $A\in S^{+}$,则 $A^{n}\in S^{+}$;若 $A\in S^{-}$,则当 n 为奇(偶)数时,$A^{n}\in S^{-}(S^{+})$;4) 若 $A\in S^{+}(S^{-})$,λ 是 A 的特征值,α 是 A 的属于 λ 的特征向量,则 $\lambda(-\lambda)$ 也是 A^{o} 的特征值,$S\alpha$ 是 A^{o} 的属于 $\lambda(-\lambda)$ 的特征向量;5) 若可逆阵 $A\in S^{+}(S^{-})$,则 $A^{-1}\in S^{+}(S^{-})$,但不存在奇数阶的可逆 O-广义反对称

收稿日期:2010-10-29;**修回日期**:2010-12-10.
* **基金项目**:重庆市教委科技项目(KJ090729)资助.
作者简介:郭伟(1963-),女,重庆市人,副教授,从事矩阵理论及其应用研究.

矩阵.

证明 1)~4)由各个定义及引理易得. 下面证明 5). 由 $A\in S^+$,有 $A^oS=SA$,$(A^{-1})^oS=(A^o)^{-1}S=(SAS^{-1})^{-1}S=(SA^{-1}S^{-1})S=SA^{-1}$, 所以 $A^{-1}\in S^+$;同理可得 $A\in S^-$,则 $A^{-1}\in S^-$;又因为$|A^o|=|A|$,若 $A\in S^-$,n 为奇数时,有$|A|=0$,从而知不存在奇数阶的可逆 O-广义反对称矩阵.

由定义 3 及引理易得:

定理 2 如果 $A\in P(S)$,那么 1) $|A|=\pm1$;2) $B\in P(S)$ 且 $AB=BA$, 则 $AB\in P(S)$.

定理 3 如果 $S\in R_n^n$, 则 $A\in P(S)$与下列条件等价 1) $A^{-1}\in P(S)$;2) A^*(伴随阵)$\in P(S)$;3) $A^o\in P(S^o)$;4) $A^-\in P(S^{\mathrm T})$;5) $A^{\mathrm T}\in P(S^-)$.

证明 1) $(A^{-1})^oSA^{-1}=(A^{-1})^oA^oSAA^{-1}=(A^{-1}A)^oS(AA^{-1})=S$,则 $A^{-1}\in P(S)$. 另一方面,$A^oSA=A^o(A^{-1})^oSA^{-1}A=(AA^{-1})^oSA^{-1}A=S$,则 $A\in P(S)$. 1)得证.

2) 证明与(1)类似.

3) $A\in P(S)\Leftrightarrow A^oSA=S\Leftrightarrow(A^oSA)^o=S^o\Leftrightarrow(A^o)^oS^oA^o=S^o\Leftrightarrow A^o\in P(S^o)$.

4) $A\in P(S)\Leftrightarrow A^oSA=S\Leftrightarrow(A^oSA)^{\mathrm T}=S^{\mathrm T}\Leftrightarrow A^{\mathrm T}S^{\mathrm T}(A^o)^{\mathrm T}=S^{\mathrm T}\Leftrightarrow[(A^{\mathrm T})^o]^oS^{\mathrm T}(A^{\mathrm T})^o=S^{\mathrm T}\Leftrightarrow(A^-)^oS^{\mathrm T}A^-=S^{\mathrm T}\Leftrightarrow A^-\in P(S^{\mathrm T})$.

5) 证明与(4)类似.

定理 4 如果 $S\in R_n^n$,$A\in P(S)$,则 1) λ 是 A 的一个特征值的充分必要条件是 λ 是 A^o 的一个特征值;2) λ 是 A 的一个特征值的充分必要条件是$\frac{1}{\lambda}$是 A^o 的一个特征值;3) 如果 $|A|=1(-1)$且 n 是奇(偶)数, $\lambda=1$ 是 A 的特征值;如果 $|A|=-1$,$\lambda=-1$ 是 A 的特征值.

证明 1) 与文献[1]定理 5 证明相同.

2) $A\in P(S)\Leftrightarrow A^oSA=S\Leftrightarrow A^{-1}=S^{-1}A^oS$,$\lambda$ 是 A 的一个特征值$\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}$是 A^{-1}的一个特征值$\Leftrightarrow A^{-1}\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha\Leftrightarrow S^{-1}A^oS\alpha=\frac{1}{\lambda}\alpha\Leftrightarrow A^oS\alpha=\frac{1}{\lambda}S\alpha\Leftrightarrow A^o\beta=\frac{1}{\lambda}\beta(\beta=S\alpha\neq0)\Leftrightarrow\frac{1}{\lambda}$是 A^o 的一个特征值.

3) $|E-A|=|E-A^o|=|E-SA^{-1}S^{-1}|=|E-A^{-1}|=|A|^{-1}|A-E|=(-1)^n\frac{1}{|A|}|E-A|$, 如果 $|A|=1(-1)$且 n 是奇(偶)数, 有 $|E-A|=0$, 则 $\lambda=1$ 是 A 的一个特征值. 类似地, 有$|E+A|=\frac{1}{|A|}|E+A|$, 如果$|A|=-1$,$|E+A|=0$,$|(-1)E-A|=0$,则 $\lambda=-1$ 是 A 的一个特征值.

定理 5 设 $S\in R_n^n$,$B\in P(S)$, 如果 $A\sim B$, 则 $A^{-1}\sim A^o$.

证明 由 $B\in P(S)$,则 $B^oSB=S$,$B^{-1}=S^{-1}B^oS$;由 $A\sim B$,则存在 $P\in R_n^n$, 使得 $A=P^{-1}BP$,有 $A^o=(P^{-1})^oB^oP^o$;$A^{-1}=P^{-1}B^{-1}P=P^{-1}S^{-1}B^oSP=P^{-1}S^{-1}P^o(P^o)^{-1}B^oP^o(P^o)^{-1}SP=[(P^o)^{-1}SP]^{-1}[(P^{-1})^oB^oP^o][(P^o)^{-1}SP]=[(P^o)^{-1}SP]^{-1}A^o[(P^o)^{-1}SP]$, 所以 $A^{-1}\sim A^o$.

由相似矩阵的性质,有推论:

推论 1 设 S,A,B 条件与定理 4 同,则有 1) $|A^{-1}|=|A^o|$;2) $r(A^{-1})=r(A^o)$(r 为秩);3) $\mathrm{tr}(A^{-1})=\mathrm{tr}(A^o)$.

定理 6 设 $S,A,B\in R_n^n$, $BQ=QB$,则 $A^oSA=B^oSB$ 当且仅当 $Q\in P(S)$, 且 $A=QB$.

证明 充分性:由 $A=QB$, $Q^oSQ=S$ 且 $BQ=QB$,则 $A^oSA=(QB)^oSQB=Q^oB^oSQB=B^oQ^oSQB=B^oSB$

必要性:$A^oSA=B^oSB$, $A=S^{-1}(A^o)^{-1}B^oSB$,令 $Q=S^{-1}(A^o)^{-1}B^oS$,则 $A=QB$ 且 $Q^oSQ=(AB^{-1})^oSAB^{-1}=A^o(B^{-1})^oSAB^{-1}=(B^{-1})^oA^oSAB^{-1}=(B^{-1})^oB^oSBB^{-1}=S$, 所以 $Q\in P(S)$.

定理 7 设 $S\in R_n^n$, $A,B\in P(S)$,则 1) 若$|AB|=-1$, 则 $|A+B|=0$;2) 若 $|A|=-|B|$, 则 $|A+B|=0$;3) 若 n 为奇数 , 则 $|(A+B)(A-B)|=0$.

证明 1) 由 $A,B\in P(S)$, 有 $A^oSA=B^oSB=S$,$A^o=SA^{-1}S^{-1}$,$B^o=SB^{-1}S^{-1}$,$|A+B|=|A^o+B^o|=|SA^{-1}S^{-1}+SB^{-1}S^{-1}|=|A^{-1}+B^{-1}|=|A^{-1}BB^{-1}+A^{-1}AB^{-1}|=\frac{1}{|AB|}|A+B|=-|A+B|$, 则$|A+B|=0$.

2) 由 $|A| = -|B|$, $|AB| = |A||B| = -|A|^2 = -1$,由(1),有 $|A+B| = 0$.

3) 与 1)的证明类似.

定理 8　设 $S \in R_n^n$, 如果 $A \in S^+, B \in S^-$, $A+B$ 可逆, 则 $(A-B)(A+B)^{-1} \in P(S)$,特别地 $(E-B)(E+B)^{-1} \in P(S)$.

证明　由 $A^oS = SA, B^oS = -SB$, 则有:

$S(A+B) = (A^O - B^o)S = (A-B)^oS; S(A-B) = (A^o+B^o)S = (A+B)^oS$

$[(A-B)(A+B)^{-1}]^oS[(A-B)(A+B)^{-1}] = (A-B)^o[(A+B)^{-1}]^oS(A-B)(A+B)^{-1} =$

$(A-B)^o[(A+B)^{-1}]^o(A+B)^oS(A+B)^{-1} = (A-B)^oS(A+B)^{-1} =$

$S(A+B)(A+B)^{-1} = S$,所以 $(A-B)(A+B)^{-1} \in P(S)$

令 $A = E$, 因为 $E^oS = SE$, 则 $(E-B)(E+B)^{-1} \in P(S)$.

定理 9　设 $S \in R_n^n$, 如果 $B \in P(S)$, $E+B$ 可逆,则存在 $A \in S^-$ 使得 $E+A$ 可逆且 B 可分解为: $B = (E-A)(E+A)^{-1} = (E+A)^{-1}(E-A)$.

证明　由 $B \in P(S)$,有 $B^oSB = S$, 令 $A = (E-B)(E+B)^{-1}$, 则 $A(E+B) = E-B$(i); $A^o(E+B^o) = E-B^o$, $A^o(E+B^o)SB = (E-B^o)SB$, $A^o(SB+S) = SB-S$, $A^oS(B+E) = -S(E-B)$,所以 $A^oS = -S(E-B)(E+B)^{-1} = -SA$. 有 $A+AB = E-B$, $(A+E)B = E-A$, 则 $B = (E+A)^{-1}(E-A) = (E-A)(E+A)^{-1}$.

由 O-广义正交矩阵的定义和性质,容易得到下面的定理.

定理 10　设 $S \in R_n^n$, $A \in R^{n \times n}$, 如果 A 满足下列 3 个条件中的两个,则 A 必满足第 3 个:1) $A \in S^+(S^-)$; 2) $A \in P(S)$; 3) $A^2 = E(-E)$.

2　应　用

定理 11　设 $A \in S^+, B \in S^-$,且 $A+B$ 可逆,则 $X = [(A-B)(A+B)^{-1}]^o$, $Y = (A-B)(A+B)^{-1}$,是方程 $XSY = S$ 的解.

证明　由定理 8 易得.

在定理 11 中令 $A = E$,则有下面的推论:

推论 1　设 $A \in S^-$, $E+A$ 可逆,则 $Y = (E-A)(E+A)^{-1} = (E+A)^{-1}(E-A)$, $X = Y^o$ 是方程 $XSY = S$ 的解.

定理 12　$A \in S^+$, K^o, K 为 $(SYS = S)$ 的可逆解,且 $E+K$ 可逆,则 $K = (A-B)(A+B)^{-1}$,其中 $B \in S^-$.

证明　令 $B = (E+K)^{-1}(E-K)A$,由 K^o, K 是 $(SYS = S)$ 的可逆解,有 $K^oSK = S$,则: $K^o = SK^{-1}S^{-1}$,下证 $B^oS = -SB$.

$$\begin{aligned} B^oS &= [(E+K)^{-1}]^o(E-K)^0A^oS = (E+K^o)^{-1}(E-K^o)SA = \\ &(E+SK^{-1}S^{-1})^{-1}(E-SK^{-1}S^{-1})SA = (SS^{-1}+SK^{-1}S^{-1})^{-1}(SS^{-1}-SK^{-1}S^{-1})SA = \\ &S(E+K^{-1})^{-1}S^{-1}S(E-K^{-1})S^{-1}SA = S(E+K^{-1})^{-1}K^{-1}K(E-K^{-1})A = \\ &S(K+E)^{-1}(K-E)A = -S(E+K)^{-1}(E-K)A = -SB; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A+B &= A+(E+K)^{-1}(E-K)A = [E+(E+K)^{-1}(E-K)]A = \\ &[(E+K)^{-1}(E+K)+(E+K)^{-1}(E-K)]A = (E+K)^{-1}2EA \end{aligned}$$

所以 $A+B$ 可逆.

由 $B = (E+K)^{-1}(E-K)A$,有 $(E+K)B = (E-K)A$, $B+KB = A-KA$, $K(A+B) = A-B$,所以 $K = (A-B)(A+B)^{-1}$.

参考文献:

[1] 许永平,石小平. 正交矩阵的充要条件与 O-正交矩阵的性质[J]. 南京林业大学学报:自然科学版,2005,29(2):54-56

[2] 郭伟. 广义次对称矩阵及广义次正交矩阵[J]. 西南师范大学学报:自然科学版,2000,25(1):18-22

[3] 郭华. 强亚次正交矩阵[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2008,25(5):445-448
[4] 袁晖坪. 准正交矩阵与准对称矩阵[J]. 工程数学学报,2004,21(1):641-644
[5] 杨昌兰,王龙波. Hermite 矩阵方程[J]. 数学研究与评论,2004,24(3):500-502
[6] 方保熔,周继东,李医民. 矩阵论[M]. 北京:清华大学出版社,2004

A New Generalization of the Symmetric Matrix and Orthogonal Matrix and Their Application

GUO Wei

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In this paper, the o-generalized (anti) symmetric matrix and o-generalized orthogonal matrix are defined, and their properties and relations are discussed, especially, the generalized Cayley decomposition of orthogonal matrix is extended to o-generalized orthogonal matrix; and by using the relation of the two matrices, the solution of a matrix equation and the expression of the solution are given, and many new results are obtained.

Key words: full-transposed matrix; o-generalized symmetric matrix; o-generalized orthogonal matrix; matrix equation; solution

责任编辑:李翠薇
校　　对:田　静

(上接第 448 页)

参考文献:

[1] 钱照平. 一个有趣的不等式[J]. 高等数学研究,2007,10(2):33 - 34
[2] 赵德勤,殷明. 一个有趣不等式的新证明方法及推论[J]. 大学数学,2010,26(1): 201-202
[3] 费时龙,张增林. 一个不等式及其应用[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2010,27(6):554-557

Several New Proof Methods for an Inequality

LIU Bo-tao

(Department of Mathematics, Kashi Teachers College, Xinjiang Kashi 844006, China)

Abstract: Four proof methods for an inequality are given by Jensen inequality in probability theory, conditional extremum, extreme value of function of several variables and property of convex function respectively. Some applications of the inequality are obtained.

Key words: inequality; Jensen inequality; extreme value; convex function

责任编辑:李翠薇