文章编号:1672 - 058X(2011)05 - 0447 - 02

一个不等式的几种新证法*

刘博涛
(喀什师范学院 数学系,新疆 喀什 844006)

摘 要:分别利用概率论中的 Jensen 不等式、条件极值、多元函数极值和凸函数的性质,给出了一个有趣不等式的 4 种新的证明方法;并给出了该不等式的应用.

关键词:不等式;Jensen 不等式;极值;凸函数
中图分类号:O172 **文献标志码**: A

文献[1]利用凸函数的性质,文献[2]利用球面上函数的条件极值分别给出了下面不等式的证明:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{1}$$

这里,$a_i > 0, x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

此处利用概率论中 Jensen 不等式、多元函数极值、条件极值等方法给出了上述不等式的 4 种新证明方法.

1 主要结果

定理 1[2] 若 $a_i > 0, x_i > 0, i = 1, 2, \cdots, n$,则下面的不等式成立:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i^{a_i}\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)^{\sum_{i=1}^{n} a_i} \tag{2}$$

证法一 构造离散型随机变量 X 的概率分布为:

$$P\left\{X = \frac{x_i}{a_i}\right\} = a_i\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1}; i = 1, 2, \cdots, n$$

令 $f(x) = \ln x$,则:

$$E(f(X)) = \sum_{i=1}^{n} \ln\frac{x_i}{a_i} \times a_i\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1} = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n} a_i \ln\frac{x_i}{a_i} = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1}\ln\Big[\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{x_i}{a_i}\Big)^{a_i}\Big],$$

$$f(EX) = \ln\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{a_i} \times a_i\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1} = \ln\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)$$

由 Jensen 不等式 $E(f(X)) \leqslant f(EX)$ 可得:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1}\ln\Big[\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{x_i}{a_i}\Big)^{a_i}\Big] \leqslant \ln\Big(\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i\Big)$$

$$\Big[\prod_{i=1}^{n}\Big(\frac{x_i}{a_i}\Big)^{a_i}\Big]^{(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{-1}} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)^{-1}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

从而不等式(1)成立.

收稿日期:2011 - 05 - 10;**修回日期**:2011 - 06 - 30.
* **基金项目**:陕西省教育厅科研专项项目(10JK449).
作者简介:刘博涛(1982 -),男,甘肃宁县人,助教,硕士,从事不等式算法研究.

证法二 考虑函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}a_i\ln x_i$ 在超平面 $\sum_{i=1}^{n}x_i=mr,m=\sum_{i=1}^{n}a_i$ 上的极值,令 $L(x_1,x_2,\cdots,x_n)=u(x_1,x_2,\cdots,x_n)+\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i-mr)=\sum_{i=1}^{n}a_i\ln x_i+\lambda(\sum_{i=1}^{n}x_i-mr)$,由 $\frac{\partial L}{\partial x_i}=\frac{a_i}{x_i}+\lambda=0,i=1,2,\cdots,n,\sum_{i=1}^{n}x_i=mr$ 可得函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有唯一的驻点 $(a_1r,a_2r,\cdots,a_nr)$,从而函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 有最大值 $u(a_1r,a_2r,\cdots,a_nr)$. 另外:

$$u(a_1r,a_2r,\cdots,a_nr)=\sum_{i=1}^{n}a_i\ln(ra_i)=\ln\left(r^{\sum_{i=1}^{n}a_i}\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}\right)$$

所以 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant u(a_1r,a_2r,\cdots,a_nr)$,即:

$$\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}\leqslant r^{\sum_{i=1}^{n}a_i}\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{-1}\right)^{\sum_{i=1}^{n}a_i}\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}$$

因此不等式(1)成立.

证法三 考虑函数 $g(t)=t\ln t,t>0$,由 Jensen 不等式有 $g(\sum_{i=1}^{n}\alpha_it_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_ig(t_i)$,对任意 $\alpha_i\geqslant0,\sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1$ 成立,取 $\alpha_i=x_i(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{-1},t_i=a_i(x_i)^{-1}$,则:

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\ln\left(\sum_{i=1}^{n}a_i(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{-1}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left(a_i\ln\frac{a_i}{x_i}\right)$$

化简可得:

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_i(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{-1}\right)^{\sum_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\frac{\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}}{\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}}$$

因此不等式(1)成立.

证法四 考虑函数 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{\sum_{i=1}^{n}a_i}$ 的最值问题,由于 h 与 $\ln h$ 有相同的极值点,从而只需要考虑函数 $\ln(h(x_1,x_2,\cdots,x_n))=\sum_{i=1}^{n}a_i\ln\sum_{i=1}^{n}x_i+\sum_{i=1}^{n}a_i\ln x_i$. 由:

$$\frac{\partial\ln(h(x_1,x_2,\cdots,x_n))}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}a_i(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{-1}+a_ix_i^{-1}=0,i=1,2,\cdots,n$$

可得唯一驻点 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,从而 $\ln(h(x_1,x_2,\cdots,x_n))\leqslant\ln(h(a_1,a_2,\cdots,a_n))$,即就是 $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\leqslant h(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,所以 $\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}(\sum_{i=1}^{n}x_i)^{\sum_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{\sum_{i=1}^{n}a_i}$,故不等式(1) 成立.

2 几个推论

推论 1 在式(1) 中令 $a_i=1,i=1,2,\cdots,n$ 或者 $a_i=n^{-1},i=1,2,\cdots,n$,则 $\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

推论 2 在式(1) 中令 $x_i=1,i=1,2,\cdots,n$ 或者 $x_i=n^{-1},i=1,2,\cdots,n$,则 $(\sum_{i=1}^{n}a_i)^{\sum_{i=1}^{n}a_i}\leqslant\prod_{i=1}^{n}(na_i)^{a_i}$.

推论 3 在式(1) 中令 $\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{i=1}^{n}a_i$,则有 $\prod_{i=1}^{n}x_i^{a_i}\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_i^{a_i}$.

(下转第 452 页)