文章编号:1672 - 058X(2011)05 - 0444 - 03

一类离散双险种风险模型的破产概率和 Lundberg 不等式*

赵 培 臣
(菏泽学院 数学系,山东 菏泽 274015)

摘 要:在经典风险模型的基础上,研究了索赔到达分别服从 Poisson 序列和负二项序列的一类离散双险种风险模型,得到了最终破产概率的表达式及其 Lundberg 不等式.

关键词:双险种;负二项随机序列;破产概率;Lundberg 不等式
中图分类号:O211.67 **文献标志码**:A

破产论是保险数学中最为活跃的研究课题之一,风险理论主要处理保险业务经营中的随机风险模型,并研究生存概率、破产概率、调节系数及它们之间的关系.研究比较多的是连续时间的风险模型.近期也有不少文献探讨了离散时间的风险模型.这两类经典风险模型大都是在单一险种下进行研究的.随着保险公司经营规模的扩大,出现了险种的多元化,在此情况下,为了满足保险公司的需要,开始提出了多险种的风险模型,如文献[1-3].此处考虑了一类离散双险种的风险模型,假设两险种的风险模型的索赔:一类为 Poisson 随机序列,一类为负二项随机序列,把文献[2,3]中的模型进行了推广.

1 风险模型的描述

在讨论风险模型之前,先介绍负二项分布的概念:称随机变量 N 服从参数为(n,p)的负二项分布,如果 $P(N=k)=C_{n+k-1}^{k}p^{n}q^{k},(k=0,1,\cdots),q=1-p$.容易得到负二项分布的期望、方差和矩母函数,它们分别为:$E[N(n)]=\dfrac{nq}{p},\mathrm{Var}[N(n)]=\dfrac{nq}{p^{2}},M_{N}(t)=\left(\dfrac{p}{1-q\mathrm{e}^{t}}\right)^{n}$.

设一给定的完备概率空间(Ω,F,P),包含了此处中所有随机变量.

定义 1 设$\{N(n),n=1,2,\cdots\}$为一非负整数值的随机变量序列,且对于任意 $n_2>n_1$, $N(n_2)-N(n_1)$服从参数为(n_2-n_1,p)的负二项分布,即 $P(N(n_2)-N(n_1)=k)=C_{n_2-n_1}^{k}p^{n_2-n_1}q^{k}(k=0,1,\cdots)$,则称序列 $N(n)$为负二项随机序列.

定义 2 设 $u\geqslant 0$,在上面的概率空间(Ω,F,P)上,令 $U(n)=u+cn-Y(n)-Z(n)$,其中 $Y(n)=\sum\limits_{k=1}^{N_1(n)}Y_k$,$Z(n)=\sum\limits_{i=1}^{N_2(n)}Y_i$.

(1) $Y_i,Z_i(i=1,2,\cdots)$都是取值于$[0,+\infty)$上独立同分布的随机变量序列,用 Y 表示与 Y_i 同分布的随机变量序列,用 Z 表示与 Z_i 同分布的随机变量序列.记 Y 的期望 $E[Y]=\mu_1$,方差 $\mathrm{Var}[Y]=\sigma_1^2$;$Z$ 的期望 $E[Z]=\mu_2$,方差 $\mathrm{Var}[Z]=\sigma_2^2$.

(2) $\{N_1(n),n=1,2,\cdots\}$是服从参数为 $\lambda(\lambda>0)$的 Poisson 随机序列;$\{N_2(n),n=1,2,\cdots\}$是服从参

收稿日期:2011 - 01 - 21;**修回日期**:2011 - 03 - 15.
* **基金项目**:山东省统计科研重点项目(KT0914).
作者简介:赵培臣(1980 -),男,山东单县人,助教,硕士,从事随机过程及金融风险研究.

数为 n 和 $p(0<p<1)$ 的负二项随机序列，记 $q=1-p$.

(3) 假设 $N_1(n),N_2(n)(n=1,2,\cdots),Y_i,Z_i(i=1,2,\cdots)$ 相互独立.

(4) 令 $S(n)=cn-Y(n)-Z(n),K(n)=Y(n)+Z(n)$.

则 $U(n)$ 就是此处要讨论的离散双险种的风险模型.

模型的实际背景：$u(u\geqslant 0)$ 是保险公司的初始资本，$c(c>0)$ 是保险公司每单位时间收取的保费，且是公司的唯一收入. Y_i 表示第一类险种的第 i 次索赔额，Z_j 表示第二类险种的第 j 次索赔额，$N_1(n)$ 表示在时间区间 $[0,n]$ 内第一类险种赔付的总次数，$N_2(n)$ 表示在时间区间 $[0,n]$ 内第二类险种赔付的总次数，而且赔付额是保险公司的唯一支出，$U(n)$ 是保险公司在时刻 n 的盈余资本.

此处不考虑利率、通货膨胀等因素，为了保证保险公司稳定经营，假设保费的收取大于单位时间期望理赔额，即 $c>\lambda\mu_1+\frac{q}{p}\mu_2$，也就是定义正相对安全负荷系数 $\theta=\frac{cp}{\lambda p\mu_1+q\mu_2}-1$. 所谓发生破产，指存在 $n>0$ 使得 $U(n)<0$，定义破产时刻 $T=\min\{t:t\geqslant 0,U(t)<0\}$，$\inf\varnothing=\infty$. 定义最终破产概率为 $\psi(u)=P(T<\infty \mid U(0)=u)$.

2　几个引理

引理 1[4]　盈利过程 $S(n)$ 具有下面的性质：

(1) $ES(n)=n\left(c-\lambda\mu_1-\frac{q}{p}\mu_2\right)>0$；(2) $\{S(n),n=1,2,\cdots\}$ 具有平稳独立增量；(3) $\lim\limits_{n\to\infty}S(n)=\infty$；(4) 存在正数 r，使得 $E(\mathrm{e}^{-rS(n)})<\infty$.

引理 2[4]　对于盈利过程 $\{S(n),n=1,2,\cdots\}$，存在函数 $g(r)$，使得 $E(\mathrm{e}^{-rS(n)})=\mathrm{e}^{ng(r)}$.

引理 3　下列方程存在唯一正解 $r=R$，称 R 为调节素数.

$$\lambda(M_Y(r)-1)+\ln\frac{p}{1-qM_Z(r)}=cr$$

其中 $M_Y(r),M_Z(r)$ 分别表示 Y,Z 的矩母函数.

证明　记 $g(r)=-cr+\lambda(M_Y(r)-1)+\ln\frac{p}{1-qM_Z(r)}$，则 $g'(r)=-c+\lambda E[Y\mathrm{e}^{rY}]+\frac{qE[Z\mathrm{e}^{rZ}]}{1-qM_Z(r)}$，$g''(r)=\lambda E[Y^2\mathrm{e}^{rY}]+\frac{qE[Z^2\mathrm{e}^{rZ}]-qM_Z(r)+q^2(E[Z\mathrm{e}^{rZ}])^2}{(1-qM_Z(r))^2}$. 由于 $g(0)=0$，$g'(0)=-c+\lambda E[Y]+\frac{qE[Z]}{1-q}=-c+\lambda\mu_1+\frac{q}{p}\mu_2$，而在相对安全负荷下 $c>\lambda\mu_1+\frac{q}{p}\mu_2$，故 $g'(0)<0$. 又因为 $1-qM_Z(r)>0$，所以 $g''(r)>0$，所以 $g(r)$ 为凸函数，进而只要 r 充分大，$g(r)$ 就可以为正，于是知 $g(r)=0$ 有两个解，除去零解 $r=0$，另有唯一正解记为 R，并称之为调节系数.

3　主要结果

定理 1　风险过程 $U(n)$ 的最终破产概率为 $\psi(u)=\frac{\exp(-Ru)}{E\{\exp[-RU(T)]\mid T<\infty\}}$，其中 R 为调节素数.

证明　由全期望公式知：

$$E[\mathrm{e}^{-rU(n)}]=E[\exp[-RU(n)]\mid T<n]P(T<n)+E[\exp[-RU(n)]\mid T\geqslant n]P(T\geqslant n)\tag{1}$$

因为 $U(n)=u+cn-Y(n)-Z(n)$，故式(1)左端可写为：

$$E[\mathrm{e}^{-rU(n)}]=\mathrm{e}^{-ru}E[\mathrm{e}^{-r(cn-Y(n)-Z(n))}]=\mathrm{e}^{-r(u+cn)}E[\mathrm{e}^{rY(n)}]E[\mathrm{e}^{rZ(n)}]=$$

$$\mathrm{e}^{-r(u+cn)}\mathrm{e}^{n\lambda(M_Y(r)-1)}\mathrm{e}^{n\ln\frac{p}{1-qM_Z(r)}}=\mathrm{e}^{-ru}\mathrm{e}^{[-rc+\lambda(M_Y(r)-1)+\ln\frac{p}{1-qM_Z(r)}]n}$$

记式(1)右端第一项为 A，则在 A 中：$U(n)=U(T)+U(n)-U(T)=U(T)+c(n-T)-(Y(n)-Y(T))-(Z(n)-Z(T))$，对于给定的 T，$Y(n)-Y(T)$，$Z(n)-Z(T)$ 与 $U(T)$ 相互独立，故：

$$A = E[e^{-rU(T)} e^{-rc(n-T)+r(Y(n)-Y(T))+r(Z(n)-Z(T))} \mid T < n]P(T < n) =$$
$$E[e^{-rU(T)} e^{-rc(n-T)} e^{(n-T)\lambda(M_Y(r)-1)} e^{(n-T)\ln\frac{p}{1-qM_Z(r)}} \mid T < n]P(T < n) =$$
$$E[e^{-rU(T)} e^{[-rc+\lambda(M_Y(r)-1)+\ln\frac{p}{1-qM_Z(r)}](n-T)} \mid T < n]P(T < n) \tag{2}$$

利用调节系数 $r=R$,则式(1)(2)化简后有:

$$e^{-Ru} = E[e^{-RU(T)} \mid T < n]P(T < n) + E[e^{-RU(n)} \mid T \geqslant n]P(T \geqslant n) \tag{3}$$

令 $n\to\infty$,则式(3)右端第一项变为 $E[e^{-RU(T)} \mid T<n]P(T<n)$,若此时第二项为 0,则定理得证,下面证之.

记 $\alpha = c - \lambda\mu_1 - \frac{q}{p}\mu_2$,$\beta^2 = \lambda\mu_1^2 + \lambda\sigma_1^2 + \frac{\mu_2^2 q}{p^2} + \frac{\sigma_2^2 pq}{p^2}$,则 $E[U(n)] = u + cn - E[Y(n)] - E[Z(n)] = u + n(c - \lambda\mu_1 - \frac{q}{p}\mu_2) = u + n\alpha$;$\mathrm{Var}[U(n)] = \mathrm{Var}[Y(n)] + \mathrm{Var}[Z(n)] = n(\lambda\mu_1^2 + \lambda\sigma_1^2 + \frac{\mu_2^2 q}{p^2} + \frac{\sigma_2^2 pq}{p^2}) = n\beta^2$.

由于 $\alpha>0$,考虑 $Q(n) = u + n\alpha - \beta n^{\frac{2}{3}}$,显然当 $n\to\infty$ 时 $Q(n)\to\infty$. 利用 $U(n)$,$Q(n)$的大小关系,将式(3)右端第二项分成两项得:$E[e^{-RU(n)} \mid T\geqslant n]P(T\geqslant n) = E[e^{-RU(n)} \mid T\geqslant n, 0\leqslant U(n)\leqslant Q(n)]P(T\geqslant n, 0\leqslant U(n)\leqslant Q(n)) + E[e^{-RU(n)} \mid T\geqslant n, U(n)>Q(n)]P(T\geqslant n, U(n)>Q(n))$.

对于 $P(0\leqslant U(n)\leqslant Q(n))$,利用不等式得:$P(0\leqslant U(n)\leqslant Q(n)) = P(0\leqslant U(n)\leqslant E[U(n)] - \beta n^{\frac{2}{3}}) \leqslant P(|U(n) - E[U(n)]| \geqslant \beta n^{\frac{2}{3}}) \leqslant \frac{\mathrm{Var}[U(n)]}{(\beta n^{\frac{2}{3}})^2} = \frac{n\beta^2}{(\beta n^{\frac{2}{3}})^2} = n^{-\frac{1}{3}}$.

故当 $n\to\infty$ 时, $P(0\leqslant U(n)\leqslant Q(n))\to 0$,而当 $n\to\infty$ 时,$e^{-RQ(n)}\to 0$. 所以当 $n\to\infty$ 时,有 $E[e^{-RU(n)} \mid T\geqslant n]P(T\geqslant n)\to 0$,于是 $\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T<\infty]}$.

推论 1 风险过程 $U(n)$的最终破产概率满足 Lundberg 不等式: $\psi(u)\leqslant e^{-Ru}$,其中 R 为调节系数.

证明 当 $n\to\infty$ 时 $U(T)<0$,所以 $E[e^{-RU(T)} \mid T<\infty]>1$,于是 $\psi(u)\leqslant e^{-Ru}$,即 Lundberg 不等式成立.

参考文献:

[1] 蒋志明,王汉兴. 一类多险种风险过程的破产概率[J]. 应用数学与计算数学学报,2000,14(1):9 – 16

[2] 罗琰,邹捷中. 一类离散双险种风险模型[J]. 数学理论与应用,2004,24(3):114-115

[3] 陈贵磊. 一类离散双险种风险模型[J]. 经济数学,2006,23(1):7-10

[4] GRANDELL J. Aspects of Risk Theroy[M]. New York: SpringerVerlag,1991

The Ruin Probability and Lundberg Inequality of a Class of Discrete Risk Model with Double-type Insurance

ZHAO Pei-chen

(Department of Mathematics, Heze University, Shandong Heze 274015, China)

Abstract: Based on the classical risk model, a class of discrete double-type insurance risk model, where the arrivals of claim respectively follow Poisson series and negative binomial series, is studied. The formula of ultimate ruin probability and Lundberg inequality for this model are obtained.

Key words: double-type insurance; negative binomial stochastic series; ruin probability; Lundberg inequality

责任编辑:李翠薇