文章编号:1672 - 058X(2011)04 - 0410 - 03

区间上连续函数的性质与构造证明法*

丁宣浩, 杨宜平
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:连续函数是“微积分”研究的主要对象;区间上连续函数的性质是“微积分”课程的重要内容;也是被认为很困难的内容;许多教材为了回避困难,不惜先引入定理,在教材的后面部分再给出证明;其实,闭区间上连续函数性质的证明的难度不会超过证明确界定理的难度,而证明这些定理的思想方法可能比这些定理本身更重要;将在确界定理与单调有界定理的基础上,利用构造性方法给出闭区间上连续函数性质的证明;并由此深入讨论一般区间上连续函数的性质。

关键词:区间;连续函数;确界定理;单调有界定理;构造法
中图分类号:G642　　**文献标志码**: A

在引入连续函数的概念之后,必然要给出闭区间上连续函数的性质。但是,通常这些性质的证明往往在更后面给出。如华东师范大学编的数学分析教材中放在第七章实数的基本理论中来给出证明[1]。为什么不可以在一开始就给出证明呢? 也许教材的作者认为证明太难了,担心初学者不容易接受。一般的非数学专业的微积分教材都把闭区间上连续函数性质的证明省去[2,3]。同样给学生造成一种普遍的印象,似乎证明太难了,已经超过了学生的接受能力。其实按照华东师范大学编的数学分析体系,该教材在第一章就给出了确界定理,第二章给出了单调有界定理,在这两个定理的基础上,完全可以给出闭区间上连续函数性质的证明。而且这些定理的证明的难度,不会超过确界存在定理的证明。学生完全可以接受的。更重要的是,证明连续函数的性质的方法,还可以为后面的实数基本定理做好铺垫。学习数学,更重要的是学习数学的思想方法。许多人对于大学里所学的数学定义与定理,过不了多久就会忘记,但是数学的思想方法可能会潜移默化地影响其终身。在此依据华东师范大学编的数学分析教材体系,依据确界定理与单调有界定理,运用构造的方法,具体给出连续函数性质的证明,希望无论对教师还是学生,都能有所启迪。

1　闭区间上连续函数的性质的证明

数学是一门非常严谨的学科,我们看到的以及实验所得到的结果,不能成为定理。只有通过严密地逻辑推理的命题才能成为定理。而构造法往往是实验与探索采用的技术,怎么能用在严格的证明中呢? 其实,在许多证明中是需要先构造出满足某种特殊性质的对象,然后再去验证的。下面通过闭区间上连续函数的性质来体会这种方法。

有界性定理 A　闭区间上的连续函数是有界的。

证明　设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。用反证法,假设 $f(x)$ 无界。要构造出一个点 $\xi \in [a,b]$,使得 $f(x)$ 在 ξ 附近既是有界的,也是无界的,从而造成矛盾。将 $[a,b]$ 二等分为 $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$, $f(x)$ 必然在两个小区间之一上是无界的。设这个小区间为 $[a_1,b_1]$。又将 $[a_1,b_1]$ 二等分,令 $f(x)$ 在上面无界的小区间

收稿日期:2010 - 09 - 30;修回日期:2010 - 12 - 21.
* 基金项目:重庆市高等教育教学改革研究项目(093088).
作者简介:丁宣浩(1957 -),男,教授,博士,四川开江人,从事算子理论与小波分析研究.

为$[a_2,b_2]$。照此构造方法一直进行下去,在$f(x)$无界的假设下,得到一个闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}$,它满足如下的性质:(1) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$;(2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$;(3) $f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界。

根据条件(1),可知$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n\cdots\leqslant b_n\leqslant\cdots\leqslant b_2\leqslant b_1$。由单调有界定理,$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都存在。又根据条件(2),$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$相等。设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi$,则由极限的不等式性质,$\xi\in[a,b]$。因为$f(x)$在$[a,b]$上连续,所以$f(x)$在点$\xi$连续。由连续函数的局部有界性推出,存在一个$\delta>0$,使得$f(x)$在$(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$上有界。根据条件(2),存在正整数$N$,当$n>N$时,$[a_n,b_n]\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$。根据条件(3),$f(x)$在$[a_n,b_n]$上无界,从而在$(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$上也无界,这是一个矛盾。故$f(x)$在闭区间$[a,b]$上有界。证毕。

注:上述定理的证明中构造出一种特殊的区间序列$\{[a_n,b_n]\}$,它满足:(1) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$;(2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$。

依据单调有界定理可推出存在$\xi=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$,且$a_n\leqslant\xi\leqslant b_n$。这为后面引入区间套定理做了很好的铺垫。

最大最小值定理 B　闭区间上的连续函数能取到最大值和最小值。

证明　设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,依据定理1,$f(x)$在$[a,b]$上有界。设$M=\sup\{f(x):x\in[a,b]\}$。假设$f(x)$不能取到最大值,则$f(x)<M,x\in[a,b]$。构造一个序列$\{x_n\}$,使得$f(x_n)\to M$。按照上确界的定义,存在$x_n\in[a,b]$,使得$M-\dfrac{1}{n}<f(x_n)<M$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=M$。再构造一个辅助函数$g(x)=\dfrac{1}{f(x)-M}$,则$g(x)$在$[a,b]$上连续,根据已经证明了的定理1,闭区间上的连续函数都是有界的,所以$g(x)$在$[a,b]$上有界。但是,$\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{f(x_n)-M}=-\infty$,这是一个矛盾。故$f(x)$能取到最大值。类似证明$f(x)$能取到最小值。证毕。

根的存在性定理 C　如果$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续且$f(a)f(b)<0$,则存在$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=0$。

证明　利用构造法的思想,将$f(x)$的零点范围逐步缩小。先将$[a,b]$二等分为$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right],\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$,如果$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)=0$,则定理获证。如果$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\neq0$,则$f(a)$和$f(b)$中必然有一个与$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$异号,这样$\left[a,\dfrac{a+b}{2}\right],\left[\dfrac{a+b}{2},b\right]$这两个小区间中,必然有一个小区间使得$f(x)$在这个区间的端点值异号,记这个小区间为$[a_1,b_1]$,它满足$f(a_1)f(b_1)<0$且区间的长度$b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$。又将$[a_1,b_1]$二等分,考虑中点的函数值,要么为零,要么不为零。如果中点的函数值为零,则定理获证。如果中点的值不为零,那么必然可以选出一个小区间 使得$f(x)$在这个区间的端点值异号,记这个小区间为$[a_2,b_2]$,它满足$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]$,$b_2-a_2=\dfrac{b-a}{2^2}$,且$f(a_2)f(b_2)<0$。采用这样的方法一直进行下去,或者到有限步时,某个区间的中点的函数值为零,这样定理的结论成立。或者所有区间的中点的函数值都不为零,那么我们就会得到一个无穷的区间序列$\{[a_n,b_n]\}$,它满足:(1) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots$;(2) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}$;(3) $f(a_n)f(b_n)<0$。

由单调有界定理,与定理1的证明一样,同样可以得到$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\xi\in[a,b]$,如果$f(\xi)=0$,则定理获证。如果$f(\xi)\neq0$,因$f(x)$在$\xi$点连续,因而由连续函数的局部保号性,存在一个$\delta>0$,使得$f(x)$在$(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$上与$f(\xi)$同号。根据所构造的区间的性质(2),存在正整数$N$,当$n>N$时,$[a_n,b_n]\subset(\xi-\delta,\xi+\delta)\cap[a,b]$。根据区间的性质(3),$f(a_n)f(b_n)<0$,这是一个矛盾。

综上所述,只有$f(\xi)=0$,且$\xi\in(a,b)$。定理获证。

注:上面采用的证明方法是非常有用的二分法,其思想可以广泛的应用于各个领域。而a_n,b_n实际上是

函数零点的近似值。

介质定理 D 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)<\mu<f(b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=\mu$。

证明 构造一个辅助函数 $g(x)=f(x)-\mu$,则 $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(a)<0,g(b)>0$,依据连续函数根的存在定理,必存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g(\xi)=0$,即 $f(\xi)=\mu$。证毕。

一致连续性定理 E 闭区间上的连续函数是一致连续的。

证明 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。假设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 不是一致连续的,则对某个正数 ε_0,对任意正数 δ,都存在 $x',x''\in[a,b]$,虽然 $|x'-x''|<\delta$,但 $|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$。要构造出两个序列 $\{x'_n\}$,$\{x''_n\}$,使它们收敛于同一个点 $x_0\in[a,b]$,但 $|f(x'_n)-f(x''_n)|\geqslant\varepsilon_0$,根据 $f(x)$ 的连续性就会造成矛盾。事实上,对任意 $\delta_n=\dfrac{1}{n}$,都存在一对数 $x_n,y_n\in[a,b]$,$|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$,但是 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$。令 $\bar{x}_n=\sup\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$,则 $b\geqslant\bar{x}_n\geqslant\bar{x}_{n+1}\geqslant a$,由单调有界定理推出极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\bar{x}_n=x_0$ 存在且 $x_0\in[a,b]$。根据上确界的定义,存在 x_{n_1},使得 $\bar{x}_1-1<x_{n_1}\leqslant\bar{x}_1$;又存在 $n_2>n_1$,使得 $\bar{x}_{n_1+1}-\dfrac{1}{2}<x_{n_2}\leqslant\bar{x}_{n_1+1}$;由归纳法,可以构造出 x_{n_k} 使得 $\bar{x}_{n_k+1}-\dfrac{1}{k+1}<x_{n_{k+1}}\leqslant\bar{x}_{n_k+1}$,$\{x_{n_k}\}$ 是 $\{x_n\}$ 的子序列,且满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\lim\limits_{k\to\infty}\bar{x}_{n_k+1}=x_0$。由于 $|x_{n_k}-y_{n_k}|<\dfrac{1}{n_k}$,因此也有 $\lim\limits_{k\to\infty}y_{n_k}=x_0$。由于 $f(x)$ 在 x_0 点是连续的,所以,$\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(y_{n_k})=f(x_0)$。于是 $\lim\limits_{k\to\infty}|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|=0$,这与 $|f(x_{n_k})-f(y_{n_k})|\geqslant\varepsilon_0$ 矛盾。故 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 必然一致连续。证毕。

注:上述定理的证明中实际上已经证明了有界数列必有收敛的子序列,这为后面的学习致密性定理做了铺垫。

2 非闭区间上连续函数的性质

学习数学感受最深的就是数学中的真理是有条件的,就像哲学中的相对真理一样。从闭区间上连续函数的性质的学习,可以很深刻地领会到这一点。如果将闭区间改为其他类型的区间,那么结论往往是不成立的。但是,如果再另外增加一些条件,可能闭区间上连续函数的某些性质又能够得以保留。当然,不需要死记这些条件与结论。去掉闭区间的条件去讨论连续函数的性质,恰好可以锻炼分析问题与解决问题的能力。

设 $[a,b]$ 为一般的区间,可以是半开半闭区间,也可以是无穷区间,即 a 可以为 $-\infty$,b 可以为 $+\infty$。一般情况下闭区间上连续函数的性质在区间 $[a,b]$ 上不一定成立。因此在此可以问:

问题:什么条件下,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界? $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能取到最大值或最小值? $f(x)$ 在 (a,b) 内有根? $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续?

在此有如下的结果:

定理 1 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 均存在,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。这里如果 $a=-\infty$,则 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 表示 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$。其余类似理解;

定理 2 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 均存在且相等,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上能取到最大值或最小值;

定理 3 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 均存在且异号,则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必有一个根;

定理 4 如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 均存在,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致连续;

上述 4 个定理的证明的思想方法都是利用构造法将区间 $[a,b]$ 分割成两部分,一部分是闭区间 $[a_1,b_1]\subset[a,b]$,另一部分是集合 $A=[a,a_1]\cup\ \|\ [b_1,b]$。在 $[a_1,b_1]$ 上利用闭区间上连续函数的性质,在集合 A 上应用极限的性质。具体证明留给读者作为练习。

(下转第 416 页)