文章编号:1672 - 058X(2011)04 - 0383 - 03

伪标准正交基的一种求法*

陈 露
(陕西理工学院 数学系,陕西 汉中 723000)

摘 要:利用双线性函数给出了伪标准正交基和伪单位矩阵的概念,讨论了伪单位矩阵的性质,在欧氏空间 Schmidt 正交化方法的基础上,得到了一种在伪欧氏空间中求伪标准正交基的方法.

关键词:伪欧氏空间;伪标准正交基;伪单位矩阵

中图分类号:O151.2 **文献标志码**: A

1 引 言

在高等代数中介绍了伪欧氏空间的定义[1],而没有详细地研究其内容. 在欧氏空间中,正交变换与正交矩阵及其相关理论的研究已取得了丰富的成果,在优化理论、计算数学、信号分析等领域中都占有举足轻重的地位. 伪欧氏空间理论随着应用的需要和研究的深入逐渐有所发展,特别是关于伪正交变换、准正交基、伪正交矩阵等理论已有一定的研究成果[2-6]. 利用双线性函数给出了伪标准正交基和伪单位矩阵的概念,讨论了伪单位矩阵的性质,在欧氏空间 Schmidt 正交化方法求标准正交基的基础上,研究在伪欧氏空间中求伪标准正交基的方法,得到了一种具体的求伪标准正交基的方法,并通过例题加以说明, 研究结果丰富了伪欧氏空间的相关理论.

为了讨论方便,先给出几个相关概念.

定义 1[3] 设 V 是 n 维线性空间,V 的一个二元实函数 $f(\alpha,\beta)$ 满足:$f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$;$f(k\alpha,\beta)=kf(\alpha,\beta)$;$f(\alpha+\beta,\gamma)=f(\alpha,\gamma)+f(\beta,\gamma)$,$\alpha,\beta,\gamma$ 是 V 中任意的向量,k 是任意的实数,则称 f 为 V 上的一个对称双线性函数. 如果 $f(\alpha,\beta)=0$ 对任意 $\beta\in V$,可推出 $\alpha=0$, f 就叫非退化的.

对于具有非退化对称的双线性函数空间 V,可以将这些双线性函数看成 V 上的一个“内积”.

定义 2[3] 设 V 是 n 维实线性空间,在 V 上定义了一个非退化对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$,则称 V 为一个伪欧氏空间. 伪欧氏空间 V 中向量 α,β 满足 $f(\alpha,\beta)=0$,则称 α,β 正交.

定义 3[5] 非负实数 $\sqrt{|f(\alpha,\alpha)|}$ 称为向量 α 的长度,记为 $|\alpha|$.

定义 4[5] 若 V 中的非零向量 ξ 使 $f(\xi,\xi)=0$,则称 ξ 为迷向向量.

2 主要结果

定义 5 在伪欧氏空间 V 中有一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$,如果满足:

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=1 & i=j=1,2,\cdots,p \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=-1 & i=j=p+1,\cdots,n \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j)=0 & i\neq j \end{cases}$$

收稿日期:2010 - 09 - 02;修回日期:2010 - 10 - 14.
* 基金项目:陕西省教育厅科研专项基金项目(2011JK0477).
作者简介:陈露(1971 -),女,陕西勉县人,副教授,硕士,从事有序代数及灰色系统理论研究.

则称为 V 的一个伪标准正交基. 如果满足：

$$\begin{cases} f(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = c(c>0) & i=j=1,2,\cdots,p \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = -c & i=j=p+1,\cdots,n \\ f(\varepsilon_i,\varepsilon_j) = 0 & i \neq j \end{cases}$$

称其为伪欧氏空间的伪准正交基. 称$\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{pmatrix}$为伪欧氏空间 V 的伪单位矩阵，记为 $E_{(p)}$.

定理 1 设 $E_{(p)}$ 是正惯性指数为 p 的 n 阶伪单位矩阵，A 为 n 阶的任意矩阵，则

(1) $E_{(p)}E_{(p)}=E$；

(2) $(E_{(p)})^{-1}=E_{(p)}$；

(3) 对矩阵左乘以 $E_{(p)}$ 就相当于对 A 矩阵的后 $n-p$ 行元素取负，右乘以 $E_{(p)}$ 就相于对 A 的后 $n-p$ 列元素取负.

证明 (1) 由伪单位矩阵的定义可知：

$$E_{(p)}E_{(p)} = \begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_p & \\ & -E_{n-p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_p & \\ & E_{n-p} \end{pmatrix} = E,\text{故命题得证.}$$

(2) 由于 $\det E_{(p)} = \pm 1$ 故 $E_{(p)}$ 可逆，又由可逆矩阵的定义及定理的(1)可知 $(E_{(p)})^{-1}=E_{(p)}$.

(3) 由矩阵的乘法及伪单位矩阵的性质显然可得.

在欧氏空间中任意 n 个线性无关的向量可以用施密特正交化方法[1]求标准正交基，那么在伪欧氏空间中也仿照欧氏空间中的作法给出求伪标准正交基的方法.

求伪标准正交基的方法：

设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是 V 的一组基，且 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是一组不全为迷向向量的向量组. 将 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 中的向量排序，使非迷向向量在迷向向量的前面，将重排后的向量组记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

(1) 取 α_1，且令 $\beta_1=\alpha_1$，则 $\{\beta_1\}$ 是 V 的伪正交基；

(2) 取 α_2，令：

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{f(\alpha_2,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1.$$

若 β_2 为非迷向向量，则继续下一步；若 β_2 为迷向向量则用 α_3 继续本步，α_3 计算后若为非迷向向量则继续下一步，若不是则用 α_4 继续本步依次类推直到为非迷向向量；若到最后还是迷向向量，则该向量组不能用此方法求解. 若有非迷向向量，将前面计算后为迷向向量的向量与最后计算为非迷向向量的向量交换位置并仍将其按次序记为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.

(3) 取 α_3，令：

$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{f(\alpha_3,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{f(\alpha_3,\beta_2)}{f(\beta_2,\beta_2)}\beta_2$，同(2)对 β_3 进行判断. 如此类推，最后取 α_n，令：

$\beta_n=\alpha_n-\dfrac{f(\alpha_n,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{f(\alpha_n,\beta_2)}{f(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\dfrac{f(\alpha_n,\beta_{n-1})}{f(\beta_{n-1},\beta_{n-1})}\beta_{n-1}$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为伪正交向量组，即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 为 V 的伪正交基；

(4) 对 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 适当调整顺序后，使 $f(\beta_i,\beta_i)>0(1\leqslant i\leqslant p)$，$f(\beta_j,\beta_j)<0(p<j\leqslant n)$，再令

$$\eta_i = \frac{\beta_i}{|\beta_i|},$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots\eta_n$ 就是所要求的伪标准正交基.

注 排除迷向向量是为了避免在对向量进行单位化时分母为零. 给出的求解伪标准正交基的方法具有

一定的局限性,对于伪正交化后出现迷向向量的情况有待进一步研究.

3　应用实例

例 1　在 R^4 中,定义一个对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2-a_3b_3-a_4b_4$,其中 $\alpha=(a_1,a_2,a_3,a_4)$,$\beta=(b_1,b_2,b_3,b_4)$,利用向量组,$\varepsilon_1=(-1,0,0,1)$,$\varepsilon_2=(1,-1,-1,1)$,$\varepsilon_3=(1,1,0,0)$,$\varepsilon_4=(1,1,1,0)$,求 V 的一组伪标准正交基.

解　由于 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是迷向向量,故对该向量组进行重排得 $\alpha_1=(1,1,0,0)$,$\alpha_2=(1,1,1,0)$,$\alpha_3=(-1,0,0,1)$,$\alpha_4=(1,-1,-1,1)$. 先对它们伪正交化,得 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)$,$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{f(\alpha_2,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,1,1,0)-(1,1,0,0)=(0,0,1,0)$,$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{f(\alpha_3,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{f(\alpha_3,\beta_2)}{f(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-1,0,0,1)+\dfrac{1}{2}(1,1,0,0)=\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0,1\right)$,$\beta_4=\alpha_4-\dfrac{f(\alpha_4,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{f(\alpha_4,\beta_2)}{f(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\dfrac{f(\alpha_4,\beta_3)}{f(\beta_3,\beta_3)}\beta_3=(1,-1,-1,1)+(0,0,1,0)-4(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0,0)=(3,-3,0,-3)$. 再单位化,得 $\eta_1=\dfrac{(1,1,0,0)}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$,$\eta_2=\dfrac{(0,0,1,0)}{1}=(0,0,1,0)$,$\eta_3=\dfrac{\left(-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0,1\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,\sqrt{2}\right)$,$\eta_4=\dfrac{(3,-3,0,-3)}{\sqrt{9}}=(1,-1,0,-1)$. 则 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 就是所要求的伪标准正交基.

例 2　在 R^4 中,定义的对称双线性函数如上, 把 $\alpha_1=(1,1,0,0)$,$\alpha_2=(1,0,1,0)$,$\alpha_3=(-1,0,0,1)$,$\alpha_4=(1,-1,-1,1)$,变成 V 的一组伪标准正交基.

解　由于该向量组的第一个向量是非迷向向量,其它的都是迷向向量,所以不需重排. 先对它们伪正交化,得:$\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)$,$\beta_2=\alpha_2-\dfrac{f(\alpha_2,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,1,1,0)-\dfrac{1}{2}(1,1,0,0)=(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0)$,$\beta_3=\alpha_3-\dfrac{f(\alpha_3,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{f(\alpha_3,\beta_2)}{f(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(-1,0,0,1)+\dfrac{1}{2}(1,1,0,0)-(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0)=(-1,1,-1,1)$,由于用 α_3 所计算的 β_3 为非迷向向量,所以将 α_3 与 α_4 交换,并将 α_4 记为 α_3,将 α_3 记为 α_4.

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{f(\alpha_3,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{f(\alpha_3,\beta_2)}{f(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(1,-1,-1,1)+4(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)=(3,-3,3,1),$$

$$\beta_4=\alpha_4-\frac{f(\alpha_4,\beta_1)}{f(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{f(\alpha_4,\beta_2)}{f(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\frac{f(\alpha_4,\beta_3)}{f(\beta_3,\beta_3)}\beta_3=(-1,0,0,1)+\frac{1}{2}(1,1,0,0)-\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0\right)+\frac{1}{2}(3,-3,3,1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right).$$

再单位化,得 $\eta_1=\dfrac{(1,1,0,0)}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{2},0,0\right)$,$\eta_2=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},1,0\right)}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2},0\right)$,$\eta_3=\dfrac{(3,-3,3,1)}{\sqrt{8}}=\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4},-\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{3\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$,$\eta_4=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)}{\sqrt{2}}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{4},-\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{\sqrt{2}}{4},\dfrac{3\sqrt{2}}{4}\right)$,则 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 就是所要求的伪标准正交基.

(下转第 389 页)