文章编号:1672－058X(2011)04－0376－03

一种复级数收敛半径判定的新方法及其应用

罗光耀[1],张利沙[2]
(1. 重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067;2. 重庆工商大学 计算机学院,重庆 400067)

摘　要:对形如 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{\varphi(n)}$ 的级数的收敛域(约定收敛域为开域),作了较深入的探讨,把级数的数域扩张到复数域,对指数也作了较大的扩展,并且得出了两个定理,给出了这种复级数的比较简单的判定方法,并作了较严格的理论证明。

关键词:函数项级数;幂级数;阿贝尔定理,收敛半径;收敛区间
中图分类号:O15　　**文献标志码**:A

定理 1　复级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn+b}(k \in R^+, b \geqslant 0)$ 与复级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n$(其中 $d_n = c_{\frac{n}{k}}$)有相同的收敛半径。

注. $d_m = c_{\frac{m}{k}}$ 的举例说明:设

$$c_n = \frac{1}{n(n+1)}, k = \frac{2}{3} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} z^{\frac{2}{3}n}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} d_m z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\frac{2n}{3}\left(\frac{2n}{3}+1\right)} z^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{9}{2n(2n+3)} z^m.$$

证明　先考虑 $k \in Q^+$,设 $k = \frac{t}{s}$(最简分数),则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn+b} = z^b \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{\frac{tn}{s}}$,又设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn+b}$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z^n$($d_n = a_{\frac{sn}{t}}$)的收敛半径分别为 R, R_1,将参考文献中的数域扩张到复数域,由参考文献中定理 2 有:$R = R_1$.

若 $k \in R^+$,则 $\exists k^* \in Q^+, \forall \varepsilon \in Q^+, k^* - \varepsilon < k < k^* + \varepsilon, \forall z_0: |z_0| < R_1$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n z_0^n$ 绝对收敛,令 $d_n = c_{\frac{n}{k^*}}$ 则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{k^* n+b}$ 绝对收敛,取 ε 足够小,使得 $|z_0|^{k^* \pm \varepsilon} < R_1^{k^* \pm \varepsilon}$,即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{(k^* \pm \varepsilon)n+b}$ 均绝对收敛,若 $|z_0|^k < |z_0|^{k^*+\varepsilon}$,则 $|c_n z_0^{kn+b}| < |c_n z_0^{(k^*+\varepsilon)n+b}|$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^{kn+b}| < \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n z_0^{(k^*+\varepsilon)n+b}|$,即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn+b}$ 绝对收敛,即 $R \geqslant R_1$;若 $|z_0|^k < |z_0|^{k^*-\varepsilon}$,同理可证 $R \geqslant R_1$,总有:$R \geqslant R_1$.

同理可证 $R \leqslant R_1$. 定理 1 证毕。

推论 1　$\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\frac{n}{k}} z^n (k \in R^+)$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径分别为则 $R = R_1^{\frac{1}{k}}$。

证明　由定理 1, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\frac{n}{k}} z^n$ 与 $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} c_n z^{kn+b} = z^{kn_0+b} \cdot \sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m z^{\mathrm{km}} (kn_0 + b \geqslant 0)$ 有相同的收敛半径 R,而

收稿日期:2011－03－03;修回日期:2011－04－01.
作者简介:罗光耀(1956 年－),男,重庆市人,讲师,从事数学研究.

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn} \xrightarrow{z^k = t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$, $|t| < R_1 \Leftrightarrow |z| < R_1^{\frac{1}{k}}$,由此知 $R = R_1^{\frac{1}{k}}$,证毕。

例 1　求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} z^{\frac{\sqrt{2}}{2}n+1}$ 的收敛半径。

方法一(用定理 1)　$k = \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{k} = \sqrt{2}, c_{\frac{n}{k}} = c_{\sqrt{2}n} = \frac{2\sqrt{2}n+1}{2^{\sqrt{2}n}}$, $\left|\frac{c_{\sqrt{2}n}}{c_{\sqrt{2}(n+1)}}\right| = \frac{2\sqrt{2}n+1}{2^{\sqrt{2}n}} \cdot \frac{2^{\sqrt{2}(n+1)}}{2\sqrt{2}(n+1)+1} = \frac{2\sqrt{2}n+1}{2\sqrt{2}(n+1)+1} \cdot \frac{2^{\sqrt{2}(n+1)}}{2^{\sqrt{2}n}} \xrightarrow{n\to\infty} 2^{\sqrt{2}}$,即 $R = 2^{\sqrt{2}}$.

方法二(用推论 1)　用推论 1 中的公式求:$R_1 = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{2n+1}{2^n} \cdot \frac{2^{n+1}}{2(n+1)+1}\right| = 2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} z^{\frac{\sqrt{2}}{2}n+1}$ 的收敛半径 $R = R_1^{\frac{2}{\sqrt{2}}} = 2^{\sqrt{2}}$。

例 2　求级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} z^{\frac{1}{2}n-1}$ 的收敛域。

解　由例 1, $R = R_1^2 = 2^2 = 4$,验证知 $z = 4$ 时级数发散。所以, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} x^{\frac{1}{2}n-1}$ 的收敛域为 $D: |z| < 4$.

推论 2　级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{kn+b}$ $(k \in R^-)$,在 $z: |z| > R_1^{\frac{-1}{k}}$ 收敛,在 $\overset{0}{U}(0, R_1^{\frac{-1}{k}})$ 发散,其中 R_1 为 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z^n$ 的收敛半径。

例 3　求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n} z^{-2n+1}$ 的收敛域。

解　由上知, $R_1 = 2$, $R_1^{\frac{-1}{k}} = 2^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,由推论 3,级数的收敛域为 $D: |z| > \frac{1}{\sqrt{2}}$。

定理 2　设复级数 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z^{\varphi(n)}$ 中,令 $\varphi^{-1}(m) = \{n | , \varphi(n) = m, m, n \in N\}$, $m_0 = \min\{m | m = \varphi(n) \in N\}$, $d_m = c_{\varphi^{-1}(m)}$,则 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z^{\varphi(n)}$ 与 $\sum_{m=m_0}^{\infty} d_m z^m$ 有相同的收敛半径。

证明　设 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z^{\varphi(n)}$ 与 $\sum_{m=m_0}^{\infty} d_m z^m$ 的收敛半径分别为 R_1, R_2. $\forall z_0: |z_0| < R_2$, $\sum_{m=m_0}^{\infty} d_m z_0^m$ 收敛,即 $\sum_{m=m_0}^{\infty} c_{\omega^{-1}(m)} z_0^m$ 绝对收敛,由此知 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z_0^{\varphi(n)}$ 绝对收敛 $\Rightarrow R_1 \geqslant R_2$,同理可证, $R_1 \leqslant R_2$。故 $R_1 = R_2$,证毕。

推论 3　设 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z^n$ 与 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z^{\varphi(n)}$ 的收敛半径分别为 R_1, R,令 $m = \varphi(n)$, $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = k > 0$,则 $R = R_1^{\frac{1}{k}}$.

证明　$\forall z_0: |z_0| < R_1$, $\sum_{n=n_0}^{\infty} C_n z_0^{\omega}$ 收敛, $\lim_{n\to\infty} \frac{m}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\varphi(n)}{n} = k > 0$, $\frac{m}{n}$ 有界, $\forall \varepsilon > 0$,当 n 充分大时,有 $\frac{n}{m} - \varepsilon < \frac{1}{k} < \frac{n}{m} + \varepsilon$,取 $|z_0|^{\left(1 \pm \varepsilon \frac{m}{n}\right)} = |z_1| < R_1$,则当 n 充分大时有 $|z_0^{\frac{1}{k}}|^m = |z_0|^{\frac{m}{k}} < |z_0|^{m\left(\frac{n}{m}+\varepsilon\right)} = |z_0^{\left(1+\varepsilon\frac{m}{n}\right)}|^n = |z_1|^n$,或者 $|z_0^{\frac{1}{k}}|^m = |z_0|^{\frac{m}{k}} < |z_0|^{m\left(\frac{n}{m}-\varepsilon\right)} = |z_0^{\left(1-\varepsilon\frac{m}{n}\right)}|^n = |z_1|^n$, $|c_n (z_0^{\frac{1}{k}})^m| = |c_n| |(z_0^{\frac{1}{k}})^m| < |c_n| |z_0^{\left(1+\varepsilon\frac{m}{n}\right)}|^n < |c_n| |z_1|^n$,由 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n z_1^n$ 绝对收敛知 $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n (z_0^{\frac{1}{k}})^{\varphi(n)} \xrightarrow{m = \varphi(n)} \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n (z_0^{\frac{1}{k}})^m$ 收敛,即 $R \geqslant R_1^{\frac{1}{k}}$,同理可证: $R \leqslant R_1^{\frac{1}{k}}$,故有: $R = R_1^{\frac{1}{k}}$。证毕。

例4 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}z^{\frac{2n2+n+1}{n}}$ 的收敛域。

解 由例1，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}z^n$ 的收敛半径 $R_1=2$，由定理2，$\varphi(n)=\frac{2n^2+n+1}{n}$，$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi(n)}{n}=2\Rightarrow R=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，又 $|z|=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ 时，$\frac{2n+1}{2^n}z^{\frac{2n2+n+1}{n}}=\frac{2n+1}{2^n}2^{\frac{2n2+n+1}{2n}}=(2n+1)2^{\frac{n+1}{2n}}>(2n+1)2^{\frac{1}{2}}>1$，$|z|=\sqrt{2}=2^{\frac{1}{2}}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{2^n}z^{\frac{2n2+n+1}{n}}$ 发散，故所求收敛域为 D：$|z|<\sqrt{2}$.

参考文献：

[1] 罗光耀,郭华. 求函数项级数收敛区间的一种新方法[J]. 大学数学,2008(6):169-172

[2] 袁德美. 传送系统效率的比较[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2004(1):68-72

[3] 袁华春. 导数的哲学思考和教学省思[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2009(4):72-73

[4] 张俊祖,葛键. 关于正项级数收敛性的一个判别准则[J]. 陕西教育学院学报,2001(2):29-31

[5] 张一方. 正项级数敛散性的微分判别法[J]. 云南师范大学学报:自然科学版,1999(3):56-58

[6] 贾达明,范新华. 正项级数敛散性的一种简易判别法[J]. 昌吉学院学报,2002(3):101-103

[7] 王良成,张强. 与 Hermite-Hadamrd 不等式相关的 2 个映射[J]. 重庆理工大学学报,2011(4):102-105

[8] 田艳芳,程新跃. 一类具有指数形式的 Einstein(α,β)一度量[J]. 重庆理工大学学报,2011(4):112-116

A New Method for Determining Convergence Radius of Complex Series and Its Application

LUO Guang-yao[1], ZHANG Li-sha[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China;
2. School of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The convergence field, which is defined as open field in this paper, of the series like $\sum_{n=0}^{\infty}CnZ^{\varphi(n)}$ is deeply discussed, the field of series is expanded into complex field, the exponent is also largely expanded, and two theorems are obtained. A relatively simple method for determining this kind of complex series is given and has been strictly verified.

Key words: series of function term; power series; Abel Theorem; convergence radius; convergence interval

责任编辑:代小红
校　　对:田　静