文章编号:1672 - 058X(2011)04 - 0360 - 03

准正交变换的三种等价定义*

郭 华
(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:从正交变换的定义形式以及几何意义上推广了正交变换的定义,并证明了三种推广定义的等价性,将推广后的线性变换称为准正交变换.

关键词:正交变换;准正交变换;线性变换;欧氏空间;内积
中图分类号:O177.3 **文献标志码**:A

1 从正交变换定义的形式进行推广

在欧氏空间 V 中,文献[1]给出了正交变换定义:欧氏空间 V 的一个线性变换 σ 叫做一个正交变换,如果它保持向量的内积不变,即 $\forall\alpha,\beta\in V$,都有 $[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]=[\alpha,\beta]$. 为了研究的范围更广泛,文献[2]对定义进行了如下推广:

定义 1[2] 设 $\sigma\in L(V)$,若 $\forall\alpha,\beta\in V$,都有 $[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]=c[\alpha,\beta]$,其中 c 是一个确定的正实数,则称 σ 为 V 的 c - 准正交变换.

首先指出定义中的条件"σ 是 V 中的一个线性变换"可以削弱,因为如下命题成立.

命题 1 σ 是 V 中的一个变换,且 $\forall\alpha,\beta\in V$,都有 $[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]=c[\alpha,\beta]$,则 σ 一定是 V 中的一个线性变换.

证明 因 $[\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta),\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)]=[\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta)]-2[\sigma(\alpha),\sigma(\alpha+\beta)]-2[\sigma(\beta),\sigma(\alpha+\beta)]+[\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)]+[\sigma(\beta),\sigma(\beta)]+2[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]=c[\alpha+\beta,\alpha+\beta]-2c[\alpha,\alpha+\beta]-2c[\beta,\alpha+\beta]+c[\alpha,\alpha]+c[\beta,\beta]+2c[\alpha,\beta]=0$,从而 $\sigma(\alpha+\beta)-\sigma(\alpha)-\sigma(\beta)=0\Rightarrow\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$.

同样 $\forall k\in R$,考虑 $[\sigma(k\alpha)-k\sigma(\alpha),\sigma(k\alpha)-k\sigma(\alpha)]=0$,可推出 $\sigma(k\alpha)=k\sigma(\alpha)$. 所以 σ 是 V 中的一个线性变换.

故定义 1 可改变为:

定义 1′ σ 是 V 中的一个变换,若 $\forall\alpha,\beta\in V$,都有 $[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]=c[\alpha,\beta]$,其中 c 是一个确定的正实数,则 σ 称为 V 中的一个 c - 准正交变换. c - 准正交变换显然是正交变换定义的推广.

在文献[3]中是如下给出正交变换定义的:设 $\sigma\in L(V)$,如 $\forall\alpha\in V$,都有 $|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$,则称 σ 为一个正交变换. 按照该种定义,文献[4]进行了如下推广:

定义 2[4] 设 σ 是 V 中的一个线性变换,如 $\forall\alpha\in V$,都有 $|\sigma(\alpha)|=c|\alpha|$,$c$ 是一个确定的正实数,则称 σ 为一个次正交变换. 显然,次正交变换是文献[3]中正交变换概念的推广.

收稿日期:2010 - 11 - 16;**修回日期**:2010 - 12 - 20.
* **基金项目**:重庆市教委科学资助项目(KJ100726).
作者简介:郭华(1962 -),女,重庆人,副教授,从事矩阵理论研究.

2　两种推广定义的等价性

定理 1　若 σ 是 V 中的一个变换,c 是一个确定的正实数,$\forall\alpha,\beta\in V$,则$[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]=c[\alpha,\beta]$的充分必要条件是 σ 是 V 中的一个线性变换,且$|\sigma(\alpha)|=\sqrt{c}|\alpha|$.

证明　必要性:由命题 1 知 σ 是 V 中的一个线性变换,又因为$[\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)]=c[\alpha,\alpha]\Rightarrow|\sigma(\alpha)|^2=c|\alpha|^2\Rightarrow|\sigma(\alpha)|=\sqrt{c}|\alpha|$.

充分性:因为$|\sigma(\alpha+\beta)|=\sqrt{c}|\alpha+\beta|\Rightarrow[\sigma(\alpha+\beta),\sigma(\alpha+\beta)]=c[\alpha+\beta,\alpha+\beta]\Rightarrow$

$$[\sigma(\alpha)+\sigma(\beta),\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)]=c[\alpha+\beta,\alpha+\beta]\Rightarrow$$
$$[\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)]+2[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]+[\sigma(\beta),\sigma(\beta)]=$$
$$c[\alpha,\alpha]+2c[\alpha,\beta]+c[\beta,\beta]$$

因为$|\sigma(\alpha)|=\sqrt{c}|\alpha|$,$|\sigma(\beta)|=\sqrt{c}|\beta|$,所以$[\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)]=c[\alpha,\alpha]$,$[\sigma(\beta),\sigma(\beta)]=c[\beta,\beta]$,于是$[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]=c[\alpha,\beta]$.

由此知道定义 2 中的次正交变换就是定义 1 中的 c^2－准正交变换.

3　从几何意义上推广正交变换

正交变换是保持向量长度不变的变换,同时也保持向量间的夹角不变. 推广后的 c－准正交变换显然不是保长变换,但它是保角变换.

定理 2　设 σ 是 V 中的一个准正交变换,即$[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]=c[\alpha,\beta]$,则$\forall\alpha,\beta\in V$,有$(\sigma(\alpha)\overset{\wedge}{,}\sigma(\beta))=(\alpha\overset{\wedge}{,}\beta)$.

证明　$$(\sigma(\alpha)\overset{\wedge}{,}\sigma(\beta))=\arccos\frac{[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]}{|\sigma(\alpha)||\sigma(\beta)|}=\arccos\frac{c[\alpha,\beta]}{\sqrt{c}|\alpha|\sqrt{c}|\beta|}=\arccos\frac{[\alpha,\beta]}{|\alpha||\beta|}=(\alpha\overset{\wedge}{,}\beta).$$

定理 3　设 σ 是 V 中的一个线性变换,且$\forall\alpha,\beta\in V$,都有$(\sigma(\alpha)\overset{\wedge}{,}\sigma(\beta))=(\alpha\overset{\wedge}{,}\beta)$, 则存在正实数 c,使$|\sigma(\alpha)|=\sqrt{c}|\alpha|$. 即保角的线性变换一定是一个 c－准正交变换.

证明　分 $\alpha\neq0$ 与 $\alpha=0$ 两种情况讨论:

1）任取 $\alpha\in V,\alpha\neq0$,在 V 中任取 $\beta\neq0$,将 α,β 正交化得 $\gamma=\beta-\dfrac{[\alpha,\beta]}{[\alpha,\alpha]}\alpha$,则$[\gamma,\alpha]=0$,即 γ,α 正交. 由条件 $\sigma(\gamma),\sigma(\alpha)$也正交,所以$[\sigma(\gamma),\sigma(\alpha)]=0$. 即:

$$\left[\sigma(\beta)-\frac{[\alpha,\beta]}{[\alpha,\alpha]}\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)\right]=0\Rightarrow[\sigma(\beta),\sigma(\alpha)]=\frac{[\alpha,\beta]}{[\alpha,\alpha]}[\sigma(\alpha),\sigma(\alpha)]=\frac{[\alpha,\beta]}{|\alpha|^2}|\sigma(\alpha)|^2 \quad (1)$$

因为 $\alpha\neq0,\beta\neq0$,$(\sigma(\alpha)\overset{\wedge}{,}\sigma(\beta))=(\alpha\overset{\wedge}{,}\beta)$,并注意到 α,β 的任意性,显然有 $\sigma(\alpha)\neq0$ 和 $\sigma(\beta)\neq0$,且有:

$$\frac{[\sigma(\alpha),\sigma(\beta)]}{|\sigma(\alpha)||\sigma(\beta)|}=\frac{[\alpha,\beta]}{|\alpha||\beta|}\Rightarrow[\sigma(\beta),\sigma(\alpha)]=\frac{|\sigma(\alpha)||\sigma(\beta)|}{|\alpha||\beta|}[\alpha,\beta] \quad (2)$$

由式(1)(2)可得$\dfrac{[\alpha,\beta]}{|\alpha|^2}|\sigma(\alpha)|^2=\dfrac{|\sigma(\alpha)||\sigma(\beta)|}{|\alpha||\beta|}[\alpha,\beta]$.

① 当$[\alpha,\beta]\neq0$ 时,可得$\dfrac{|\sigma(\alpha)|}{|\alpha|}=\dfrac{|\sigma(\beta)|}{|\beta|}$,由 α,β 的任意性可知$\forall\alpha\in V,\alpha\neq0$,$\dfrac{|\sigma(\alpha)|}{|\alpha|}$应是一个确定的正常数,记为$\sqrt{c}$,即$\dfrac{|\sigma(\alpha)|}{|\alpha|}=\sqrt{c}\Rightarrow|\sigma(\alpha)|=\sqrt{c}|\alpha|$.

② 当$[\alpha,\beta]=0$,因 $\alpha\neq0,\beta\neq0$,此时必为 α,β 正交,于是 $\sigma(\alpha),\sigma(\beta)$也正交,故$[\sigma(\beta),\sigma(\alpha)]=0$ 而$[\alpha,\alpha+\beta]=[\alpha,\alpha]+[\alpha,\beta]\neq0$,因 $\alpha\neq0$,显然 $\alpha+\beta\neq0$,由式(1)的结论有$\dfrac{|\sigma(\alpha)|}{|\alpha|}=\dfrac{|\sigma(\alpha+\beta)|}{|\alpha+\beta|}=\sqrt{c}$,又

$[\beta,\alpha+\beta]=[\beta,\alpha]+[\beta,\beta]\neq 0$,同理由式(1)知也有$\frac{|\sigma(\beta)|}{|\beta|}=\frac{|\sigma(\alpha+\beta)|}{|\alpha+\beta|}=\sqrt{c}$,于是$\frac{|\sigma(\alpha)|}{|\alpha|}=\frac{|\sigma(\beta)|}{|\beta|}=\sqrt{c}\Rightarrow|\sigma(\alpha)|=\sqrt{c}|\alpha|$.

2)当 $\alpha=0$ 时,显然有 $\sigma(\alpha)=0$(因为 σ 是线性变换),所以 $|\sigma(\alpha)|=\sqrt{c}|\alpha|$ 成立,故当 σ 保角时,σ 一定是 c-准正交变换. 故可从几何的角度给出准正交变换的定义:

定义 3 设 σ 是 V 中的一个线性变换,且 $\forall\alpha,\beta\in V$,都有 $(\sigma(\alpha)\overset{\wedge}{,}\sigma(\beta))=(\alpha\overset{\wedge}{,}\beta)$, 则称 σ 是一个准正交变换.

从前面的讨论可知准正交变换就是 V 中的保角变换,但它不保长.

参考文献:

[1] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 北京:高教出版社,1983

[2] 袁晖坪. 准正交基与准正交变换[J]. 数学理论与应用,2001,21(3):17-21

[3] 袁晖坪. 拟正交变换与拟对合变换[J] . 重庆工商大学学报:自然科学版,2001,57(1):1-5

[4] 张禾瑞,郝炳新. 高等代数[M]. 3 版. 北京:高教出版社,1983

[5] 樊启毅,梅汉飞. 正交变换的推广[J]. 数学理论与应用,2003,23(4):102-104

[6] 郭伟. 广义正交基、正交变换及正交矩阵[J]. 大学数学,2005,21(3):94-97

[7] 陈黎钦. 关于正交变换的若干问题[J]. 福建商业高等专科学校学报,2006,12(6) :110-113

[8] 彭震春. 关于准正交变换的几个条件[J]. 湘潭师范学院学报:自然科学版,2002,24(2):9-11

[9] 侯维民. 关于正交变换两种定义方式探讨[J]. 高等数学研究,2005,8(1):44-45

Three Equivalent Definitions and the Determination of Quasi-orthogonal Transform

GUO Hua

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The definition of orthogonal transform is extended in the form of definition of orthogonal trans form as well as in the geometric significance, and the equivalence of the three generalization definitions is proved. The generalized linear transform is called quasi-orthogonal transform.

Key words: orthogonal transform; quasi-orthogonal transform; linear transform; Euclidean space; inner product

责任编辑:李翠薇