文章编号:1672 - 058X(2011)04 - 0347 - 04

带有阻尼项的二阶哈密顿系统的周期解*

王少敏
(大理学院 数学与计算机学院,云南 大理 671000)

摘 要:研究二阶系统:$\begin{cases}\ddot{u}(t)+q(t)\dot{u}(t)+\nabla F(t,u(t))=0,\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0,\end{cases}$ a. e. $t\in[0,T]$的周期解的存在性,通过使用临界点理论中的极大极小方法获得了一个新的存在性定理.

关键词:周期解;极大极小方法;广义山路定理;条件(C)
中图分类号:O177. 25 **文献标志码**:A

1 引言和主要结果

考虑二阶系统:

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)+q(t)\dot{u}(t)+\nabla F(t,u(t))=0,\\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0,\end{cases}\quad \text{a. e. } t\in[0,T] \tag{1}$$

其中 $T>0$, $q\in L^1(0,T;R)$, $Q(t)=\int_0^T q(s)\mathrm{d}s$, $F:[0,T]\times R^N\to R$ 满足如下假设:

假设(A) $F(t,x)$对于每个 $x\in R^N$ 关于 t 可测,对于 a. e. $t\in[0,T]$关于 x 是连续可微的,存在 $a\in C(R^+,R^+)$, $b\in L^1(0,T;R^+)$使得$|F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$, $|\nabla F(t,x)|\leqslant a(|x|)b(t)$对于 $x\in R^N$ 和 a. e. $t\in[0,T]$成立.

$H_T^1=\{u:[0,T]\to R^N\mid u$ 绝对连续, $u(0)=u(T)$, $\dot{u}\in L^2(0,T;R^N)\}$是一个 Hilbert 空间,具有范数 $\|u\|=\left(\int_0^T e^{Q(t)}|u(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T e^{Q(t)}|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall u\in H_T^1$,其等价于如下范数 $\|u\|_0=\left(\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall u\in H_T^1$.

相应泛函 $\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t-\int_0^T e^{Q(t)}F(t,u(t))\mathrm{d}t$ 在 H_T^1 上连续可微且弱下半连续[1]. 众所周知, $u\in H_T^1$ 是问题(1)的一个解的充要条件是 u 是 φ 的一个临界点[1].

当 $q(t)\equiv 0$, $t\in[0,T]$时,在假设(A)和一些适当的条件下,通过使用最小作用原理和临界点理论中的极大极小方法,人们已经获得了很多存在性结果[2-10]. 特别地,陶、唐在文献[5]中获得了如下定理:

定理 1[5] 设 F 满足假设(A)和以下条件:$F(t,x)\geqslant 0$, $\forall(t,x)\in[0,T]\times R^N$; $\lim\limits_{|x|\to 0}\frac{F(t,x)}{|x|^2}<\frac{1}{4}\omega^2$,对 a. e. $t\in[0,T]$一致成立; $\liminf\limits_{|x|\to\infty}\frac{F(t,x)}{|x|^2}>\frac{1}{2}\omega^2$ 对 a. e. $t\in[0,T]$一致成立. 其中 $\omega=\frac{2\pi}{T}$, 存在常数 $r>2$, $\mu>r-2$,使得 $\limsup\limits_{|x|\to\infty}\frac{F(t,x)}{|x|^r}<\infty$ 对 a. e. $t\in[0,T]$一致成立; $\liminf\limits_{|x|\to\infty}\frac{(\nabla F(t,x),x)-2F(t,x)}{|x|^\mu}>0$ 对 a. e. $t\in[0,T]$一

收稿日期:2010 - 12 - 11;**修回日期**:2011 - 01 - 06.
* **基金项目**:云南省教育厅科学研究基金项目(09Y0367).
作者简介:王少敏(1975 -),女,云南大理人,副教授,硕士,从事非线性分析的研究.

致成立. 则问题：

$$\begin{cases}\ddot{u}(t)+\nabla F(t,u(t))=0 \\ u(0)-u(T)=\dot{u}(0)-\dot{u}(T)=0\end{cases} \quad \text{a. e. } t\in[0,T]$$

至少存在一个非零的 T－周期解.

由于受到这个定理的启发,获得了系统(1)的一个存在性定理.

定理2 设 F 满足假设(A)和如下条件：

(i) $F(t,x)\geqslant 0, \forall (t,x)\in[0,T]\times R^N$ (2)

(ii) $\lim\limits_{|x|\to 0}\dfrac{F(t,x)}{|x|^2}<\dfrac{d_1\omega^2}{4d_2}$, a. e. $t\in[0,T]$ (3)

(iii) $\liminf\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{F(t,x)}{|x|^2}>\dfrac{d_2\omega^2}{2d_1}$, a. e. $t\in[0,T]$ (4)

其中 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}, d_1=\min\limits_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{Q(t)}$, $d_2=\max\limits_{t\in[0,T]}\mathrm{e}^{Q(t)}$, 存在常数 $r>2,\mu>r-2$,使得：

$$\limsup_{|x|\to\infty}\frac{F(t,x)}{|x|^r}<\infty, \text{a. e. } t\in[0,T] \tag{5}$$

$$\liminf_{|x|\to\infty}\frac{(\nabla F(t,x),x)-2F(t,x)}{|x|^\mu}>0, \text{a. e. } t\in[0,T] \tag{6}$$

则问题(1)至少存在一个非零的 T-周期解.

2 定理的证明

存在一个常数 $c_0>0$, 使得：

$$\|u\|_\infty \overset{\Delta}{=} \max_{t\in[0,T]}|u(t)|\leqslant c_0\|u\|, \forall u\in H_T^1 \tag{7}$$

令 $\bar{u}=\left(\dfrac{1}{T}\right)\int_0^T u(t)\mathrm{d}t, \tilde{u}(t)=u(t)-\bar{u}$,则 $\widetilde{H}_T^1=\{u\in H_T^1\mid \bar{u}=0\}$ 是 H_T^1 的一个子空间. 有：

$$\int_0^T|u(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{T^2}{4\pi^2}\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t, \forall u\in\widetilde{H}_T^1(\text{Wirtinger's 不等式}) \tag{8}$$

因此：

$$\|u\|^2\leqslant d_2\left(1+\frac{T^2}{4\pi^2}\right)\int_0^T|\dot{u}(t)|^2\mathrm{d}t \tag{9}$$

且有 $\|u\|_0^2\leqslant\left(1+\dfrac{T^2}{4\pi^2}\right)\int_0^T|\dot{u}|^2\mathrm{d}t$.

引理1 如果假设(A),式(5)(6)成立,则泛函 φ 满足条件(C). 也就是,对任意序列 $\{u_n\}\subset H_T^1$, 如果 $\varphi(u_n)$ 有界,且当 $n\to\infty$ 时,有 $(1+\|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\|\to 0$, 则 $\{u_n\}$ 有一个收敛子列.

证明 设 $\{u_n\}\subset H_T^1,\varphi(u_n)$ 有界,且当 $n\to\infty$ 时,有 $(1+\|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\|\to 0$,则存在一个常数 $M>0$,使得：

$$|\varphi(u_n)|\leqslant M, (1+\|u_n\|)\|\varphi'(u_n)\|\leqslant M \tag{10}$$

一方面,由式(5),存在一个常数 $c>0,\delta_1>0$, 使得：

$$F(t,x)\leqslant c|x|^r, \forall |x|\geqslant\delta_1, \text{ a. e. } t\in[0,T] \tag{11}$$

由假设(A),有 $|F(t,x)|\leqslant\max\limits_{s\in[0,\delta_1]}a(s)b(t), \forall |x|\leqslant\delta_1$, a. e. $t\in[0,T]$.

因此,对任意 $x\in R^N$, a. e. $t\in[0,T]$, 有：

$$F(t,x)\leqslant\max_{s\in[0,\delta_1]}a(s)b(t)+c|x|^r \tag{12}$$

通过式(10)(12)以及 Hölder 不等式,有：

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2=\varphi(u_n)+\int_0^T e^{Q(t)}F(t,u_n(t))dt+\frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}|u_n|^2dt\leqslant$$
$$M+c_1+cd_2\int_0^T|u_n|^r dt+\frac{1}{2}d_2\int_0^T|u_n|^2dt\leqslant$$
$$M+c_1+cd_2\int_0^T|u_n|^r dt+\frac{1}{2}d_2T^{\frac{r-2}{r}}\left(\int_0^T|u_n|^r dt\right)^{\frac{2}{r}} \tag{13}$$

其中 $c_1=\max\limits_{s\in[0,\delta_1]}d_2a(s)\int_0^T b(t)dt$.

另一方面，由式(6)，存在常数 $c_2>0,\delta_2>0$，使得 $(\nabla F(t,x),x)-2F(t,x)\geqslant c_2|x|^\mu>0,\forall|x|\geqslant\delta_2$, a.e. $t\in[0,T]$. 由假设(A)，有 $|(\nabla F(t,x),x)-2F(t,x)|\leqslant c_3b(t),\forall|x|\leqslant\delta_2$, a.e. $t\in[0,T]$. 其中 $c_3=(2+\delta_2)\max\limits_{s\in[0,\delta_2]}a(s)$. 因此，有 $(\nabla F(t,x),x)-2F(t,x)\geqslant c_2|x|^\mu-c_2\delta_2^\mu-c_3b(t),\forall x\in R^N$, a.e. $t\in[0,T]$. 因此：

$$3M\geqslant 2\varphi(u_n)-(\varphi'(u_n),u_n)=$$
$$\int_0^T e^{Q(t)}[(\nabla F(t,u_n),u_n)-2F(t,u_n)]dt\geqslant$$
$$c_2d_1\int_0^T|u_n|^\mu dt-Tc_2\delta_2^\mu d_2-c_3d_2\int_0^T b(t)dt$$

所以 $\int_0^T|u_n|^\mu dt$ 是有界的. 如果 $\mu>r$，由式(13) 和 Hölder 不等式，有 $\int_0^T|u_n|^r dt\leqslant T^{\frac{(\mu-r)}{\mu}}\left(\int_0^T|u_n|^\mu dt\right)^{\frac{r}{\mu}}$，因此 $\|u_n\|$ 有界. 如果 $\mu\leqslant r$，由式(7)，有 $\int_0^T|u_n|^r dt=\int_0^T|u_n|^{r-\mu}\cdot|u_n|^\mu dt\leqslant\|u_n\|_\infty^{r-\mu}\int_0^T|u_n|^\mu dt\leqslant c_0^{r-\mu}\|u_n\|^{r-\mu}\int_0^T|u_n|^\mu dt$.

因此，由式(13)，$r-\mu<2$，知道 $\|u_n\|$ 有界. 综上所述，$\|u_n\|$ 有界. 正如文献[3]中的命题4.3 的证明一样，能够证明 $\{u_n\}$ 有一个收敛子列，从而 φ 满足条件(C).

现在给出主要结果的证明.

定理 1 的证明　正如文献[11]所示，将(PS)条件替换为条件(C)后，形变引理仍然成立. 因此，由文献[12]中的定理 5.29，只须证明：

(h_1) $\inf\limits_{u\in S}\varphi(u)\geqslant b>0$；$(h_2)$ $\sup\limits_{u\in Y}\varphi(u)<d<\infty$，$\sup\limits_{u\in\partial Y}\varphi(u)\leqslant 0$.

其中 $S=\tilde{H}_T^1\cap\partial B_\rho$，$Y=\{x+tz|x\in R^N\cap B_{y_2},t\in[0,y_1]\}$，$\rho<y_1$，$z\in\tilde{H}_T^1$. 由式(3)，对于 $\frac{\omega^2d_1}{4d_2}$，存在一个常数 $\delta_0\in(0,\delta_1)$，使得：

$$F(t,x)\leqslant\frac{1}{4}\omega^2|x|^2\cdot\frac{d_1}{d_2},\forall|x|\leqslant\delta_0,\text{a.e. }t\in[0,T] \tag{14}$$

由假设(A)，有：

$$|F(t,x)|\leqslant\max_{s\in[\delta_0,\delta_1]}a(s)b(t),\forall\delta_0\leqslant|x|\leqslant\delta_1,\text{a.e. }t\in[0,T] \tag{15}$$

则由式(11)(14)(15)，对任意 $x\in R^N$，a.e. $t\in[0,T]$，有：

$$F(t,x)\leqslant\frac{1}{4}\omega^2|x|^2\cdot\frac{d_1}{d_2}+\left(\max_{s\in[\delta_0,\delta_1]}a(s)b(t)\delta_0^{-r}+c\right)|x|^r \tag{16}$$

所以根据式(7)(8)(9)(16)，对任意 $u\in\tilde{H}_T^1$，有：

$$\varphi(u)=\frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}|\dot{u}(t)|^2dt-\int_0^T e^{Q(t)}F(t,u(t))dt\geqslant$$
$$\frac{1}{2}d_1\int_0^T|\dot{u}(t)|^2dt-\frac{1}{4}d_1\int_0^T|\dot{u}(t)|^2dt-\max_{s\in[\delta_0,\delta_1]}a(s)\delta_0^{-r}\|u\|_\infty^r\int_0^T b(t)dt-cT\|u\|_\infty^r\geqslant$$
$$\frac{d_1}{4d_2}\left(1+\frac{T^2}{4\pi^2}\right)^{-1}\|u\|^2-(cc_0^rT+c_1c_0^r\delta_0^{-r})\|u\|^r \tag{17}$$

因此,存在常数 $b>0$, $\rho\in(0,1)$,使得 $\varphi(u)\geqslant b$, $\forall u\in\widetilde{H}_T^1$ 且 $\|u\|=\rho$.

令 $S=\widetilde{H}_T^1\cap\partial B_\rho$, 则 $\inf\limits_{u\in S}\varphi(u)\geqslant b>0$,从而证明了$(h_1)$. 下面证明$(h_2)$.

由式(4),取 $\varepsilon_0=\inf\limits_{t\in[0,T]}\liminf\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{F(t,x)}{|x|^2}-\dfrac{\omega^2 d_2}{2d_1}>0$, 则存在 $\delta_3>0$, 使得:

$$F(t,x)\geqslant\left(\frac{\omega^2 d_2}{2d_1}+\varepsilon_0\right)|x|^2,\ \forall |x|\geqslant\frac{\delta_3}{2},\text{a. e. } t\in[0,T] \tag{18}$$

因此,对任意的 $x\in R^N$, $t\in[0,T]$,有:

$$F(t,x)\geqslant\left(\frac{\omega^2 d_2}{2d_1}+\varepsilon_0\right)|x|^2-\left(\frac{\omega^2 d_2}{2d_1}+\varepsilon_0\right)\delta_3^2 \tag{19}$$

令 $G_T^1=R^N\oplus\operatorname{span}\{z\}$,其中 $z=z_1\sin(\omega t)$, $z_1=(1,0,\cdots,0)\in R^N$. 通过计算知 $\|z\|_0\geqslant1$. 又因为 $\dim(G_T^1)<+\infty$,因此存在 $\delta>0$,使得 :

$$\int_0^T|u|^2\mathrm{d}t\geqslant\delta\|u\|_0^2,\ \forall u\in G_T^1 \tag{20}$$

令 $Y=\{x\in R^N,|x|\leqslant T^{-\frac{1}{2}}r_1\}\oplus\{sz|0\leqslant s\leqslant r_1\}$, 其中 $r_1=\max\{2,(\delta\varepsilon_0 d_1)^{-\frac{1}{2}}c_4^{\frac{1}{2}}\}$, $c_4=\left(\dfrac{\omega^2 d_2}{2d_1}+\varepsilon_0\right)\delta_3^2 Td_2$,则对任意 $x+sz\in Y$,由式(19)(20),有 :

$$\begin{aligned}\varphi(x+sz)&=\frac{1}{2}\int_0^T e^{Q(t)}|s\dot{z}(t)|^2\mathrm{d}t-\int_0^T e^{Q(t)}F(t,x+sz)\mathrm{d}t\leqslant\\&\frac{d_2}{2}\omega^2\int_0^T|x+sz|^2\mathrm{d}t-\left(\frac{\omega^2 d_2}{2d_1}+\varepsilon_0\right)d_1\int_0^T|x+sz|^2\mathrm{d}t+c_4=\\&-\varepsilon_0 d_1\int_0^T|x+sz|^2\mathrm{d}t+c_4\leqslant\\&-\varepsilon_0\delta d_1(\|x\|_0^2+s^2\|z\|_0^2)+c_4\end{aligned} \tag{21}$$

由式(21),对每一个 $x+sz\in Y$, 其中 $|x|=T^{-\frac{1}{2}}r_1$,有:

$$\varphi(x+sz)\leqslant-\varepsilon_0 d_1\delta\|x\|_0^2+c_4\leqslant-\varepsilon_0 d_1\delta r_1^2+c_4\leqslant0 \tag{22}$$

由式(21) 和 $\|z\|_0\geqslant1$,对任意 $x+r_1 z\in Y$,有:

$$\varphi(x+r_1 z)\leqslant-\varepsilon_0\delta d_1\cdot r_1^2\|z\|_0^2+c_4\leqslant0 \tag{23}$$

如果 $s=0$,对任意 $x\in R^N$,由式(2),有:

$$\varphi(x)=-\int_0^T F(t,x)\mathrm{d}t\leqslant0 \tag{24}$$

所以由式(21-24),得到$\sup\limits_{u\in\partial Y}\varphi(u)\leqslant0$,从而证明了$(h_2)$.

因此,问题(1)至少存在一个非零的 T-周期解.

参考文献:

[1] WU X,CHEN SH X, TENG K M. On variational methods for a class of damped vibration problemsI [J]. Nonlinear Analysis, 2008,68:1432-1441

[2] BERGER M S, SCHECHTER M. On the solvability of semi-linear gradient operator equations [J]. Adv Math, 1977,25:97-132

[3] MAWHIN J, WILLEM M. Critical Point Theory and Hamiltonian Systems [M]. Springer-Verlag, Berlin New York, 1989

[4] MAWHIN J. Semi-coercive monotone variational problems[J]. Acad Roy Belg Bull Cl Sci, 1987,73(5):118-130

[5] TAO ZH L, TANG CH L. periodic and subharmonic solutions of second order Hamiltonian systems [J]. J Math Amal Appl, 2004,293:435-445

[6] TANG C L. Periodic solutions of non-autonomous second order systems with γ-quasisub-additive potential [J]. J Math Anal Appl, 1995,189:671-675

[7] TANG C L. Periodic solutions of non-autonomous second order systems [J]. J Math Anal Appl, 1996,202:465-469

(下转第 359 页)