文章编号:1672 - 058X(2011)04 - 0343 - 04

随机环境中马氏链的常返与强常返

武 晓 敏

(山西忻州师范学院 数学系,山西 忻州 034000)

摘 要:引出了随机环境中马氏链的 π-不可约和强 π-不可约性的定义,在强 π-不可约条件下,得到了随机环境中马氏链强常返的充要条件以及随机环境中马氏链常返的判定准则,最后在 π-不可约条件下讨论了常返与强常返的关系.

关键词:随机环境;马氏链;π-不可约;强 π-不可约;常返性;强常返性

中图分类号:O211.62 **文献标志码**:A

20 世纪 80 年代初,Cogburn 等人开始研究随机环境中马氏链的一般理论,取得了一系列结果[1-3],文献[4]利用经典环境中马氏链的理论,研究了 Hopf 马氏链的状态性质. 文献[5,6]引入随机环境中马氏链的 π-不可约性、常返性和瞬时性的概念,并给出链常返的几个充分条件. 文献[7]引入随机环境中马氏链的强 π-不可约性,给出了一个非正则本质状态不存在的充分条件. 在此基础上,进一步讨论了随机环境中马氏链的常返性和强常返性,在强 π-不可约条件下,得到了随机环境中马氏链强常返的充要条件和随机环境中马氏链常返的判定准则,最后在 π-不可约条件下讨论了常返与强常返的关系.

1 记号与定义

设 Z 表示整数集,N 表示非负整数集,(Ω,F,P) 是一概率空间,$(X,\boldsymbol{A})$,$(\Theta,\boldsymbol{B})$ 为任意的两个可测空间. $\xi=\{\xi_n,\ n=\cdots,-1,0,1,\cdots\}$ 和 $X=\{X_n,n=0,1,2,\cdots\}$ 分别是 (Ω,F,P) 上取值于 Θ 和 X 的随机序列,$\{P(\theta),\theta\in\Theta\}$ 是 $(X,\boldsymbol{A})$ 上的转移函数族,且假设对任意的 $A\in\boldsymbol{A}$,$P(\cdot,\cdot,A)$ 是 $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}$ 可测的,$\{K(\cdot,\cdot)\}$ 是 $(\Theta,\boldsymbol{B})$ 上的转移矩阵,并假设对任意 $B\in\boldsymbol{B}$,$K(\cdot,B)$ 是 $\boldsymbol{B}$ 可测的. 对任一序列 $\eta=\{\eta_n\}$,记 $\eta_k^r=\{\eta_n,k\leqslant n\leqslant r\}$,$-\infty\leqslant k\leqslant r\leqslant+\infty$. 设 $\Theta_k^r=\prod_{j=k}^{r}\Theta_j$,$B_k^r=\prod_{j=k}^{r}B_j$,其中 $\Theta_j=\Theta$,$B_j=B$,$-\infty\leqslant k\leqslant r\leqslant+\infty$. $\theta=\{\theta_n\}=(\cdots,\theta_{-1},\theta_0,\theta_1,\cdots)$ 是 Θ^Z 上的坐标过程. π 是 B^Z 上过程 ξ 的分布,T 是坐标推移:$T^k\theta=\{\theta'_n\}$,$\theta'_n=\theta_{n+k}(k=\cdots,-1,0,1,\cdots)$. 设 $E=X\times\Theta^Z$,$\varepsilon=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}^Z$,$\varepsilon_k^r=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}_k^r$,$\kappa$ 是 $\boldsymbol{A}$ 上的计数测度,π 是 $\boldsymbol{B}^Z$ 上的分布,$\mu=\kappa\times\pi$. 定义 (E,ε) 上转移函数:$P(x,\theta;\{y\}\times B)=P(\theta_0;x,y)I_B(T\theta)$,$B\in\boldsymbol{B}^Z$. 对 $C\in\varepsilon$,设 $(C)_x=\{\theta:(x,\theta)\in C\}$,$[C]_x=\{(x,\theta):\theta\in(C)_x\}$.

定义 1 如果对任意的 $A\in\boldsymbol{A}$,$n\in N$,有 $P(X_0\in A|\xi)=P(X_0\in A|\xi_{-\infty}^0)$,$P(X_{n+1}\in A|X_0^n,\xi)=P(\xi_n;X_n,A)$,则称 X 为随机环境 ξ 中的马氏链,ξ 为随机环境序列.

设集合 $F\in\varepsilon$,τ_F 是首达到集合 F 的时刻,记 $\eta_F=\sum_{n=1}^{\infty}I_{\{(X_n,T^n\xi)\in F\}}$,$\eta_x=\eta_{[E]_x}$,$L(x,\theta;F)=P_{(x,\theta)}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(X_n,T^n\theta)\in F\})$;$Q(x,\theta;F)=P_{(x,\theta)}(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{(X_n,T^n\theta)\in F\})$,$F^n(x,\theta;F)=P_{(x,\theta)}(\tau_F=n)$.

直观上,η_F 是双链 $(X_n,T^n\xi)$ 到达 F 的次数,$L(x,\theta;F)$,$Q(x,\theta;F)$ 分别是双链 $(X_n,T^n\xi)$ 从点 (x,θ) 出发

收稿日期:2010 - 11 - 01;**修回日期**:2010 - 12 - 03.

作者简介:武晓敏(1980 -),女,山西忻州人,助教,硕士研究生,从事概率极限理论研究.

经有限步到达 F 的概率,无限次到达 F 的概率,$F^n(x,\theta;F)$ 是双链 $(X_n, T^n\xi)$ 于 n 时刻第一次到达 F 的概率.

定义2 称 X 是 π-不可约的,若对任意的 $x,y\in X$,对几乎处处的 $\theta\in\Theta^Z$,$B\in\boldsymbol{B}^Z\pi B>0$,存在 $m\geqslant 1$,使得 $\theta\in T^{-m}B$,$P(\theta_0,\cdots,\theta_{m-1};x,y)>0$.

定义3 称 X 是强 π-不可约的,若对任意的 $x,y\in X$,对几乎处处的 $\theta\in\Theta^Z$,$B\in\boldsymbol{B}^Z\pi B>0$,存在 $m\geqslant 1$,使得 $\theta\in T^{-m}B$,$F^m(x,\theta;[E]_y)>0$.

定义4 称状态 x 为常返的,如果对所有的 $\theta\in\Theta^Z$,有 $E_{x,\theta\eta_x}=\infty$.

定义5 称集合 $F\in\varepsilon$ 是本质的,若 $\mu((x,\theta):Q(x,\theta;F)>0)>0$;称状态 x 是本质的,若 $[E]_x$ 是本质的;否则称 x 是非本质的.

定义6 称集合 $F\in\varepsilon$ 是非正则本质的,若 F 是本质的且是可数个非本质集的并;否则称 F 是正则本质的. 称状态 x 是非正则本质的,若集合 $[E]_x$ 是非正则本质的,即 $[E]_x$ 是本质的,且存在 $B_n\in\boldsymbol{B}^Z$,使得 $[E]_x=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\{x\}\times B_n)$ 满足 $\forall y\in X$,$\pi(\theta:Q(y,\theta;\{x\}\times B_n)=0)=1$;否则称 x 是正则本质的.

定义7 称状态 x 是强常返的,若 $\pi\{\theta:Q(x,\theta;[E]_x)=1\}=1$;称状态 x 是弱常返的,若 $\pi\{\theta:G(x,\theta;[E]_x)=\infty\}=1$;称状态 x 是强暂留的,若 $\pi\{\theta:G(x,\theta;[E]_x)<\infty\}=1$.

2 主要定理

引理1[5] 对任意的 $(x,\theta)\in E$,$F\in\varepsilon$,有:

① $L(x,\theta;F)=\sum_{n=1}^{\infty}F^n(x,\theta;F)$;

② $Q(x,\theta;[E]_y)=\sum_{n=1}^{\infty}F^n(x,\theta;[E]_y)Q(y,T^n\theta;[E]_y)$;

③ $G(x,\theta;[E]_y)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\theta_0,\cdots,\theta_{n-1};x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}F^k(x,\theta;[E]_y)P_{(y,T^k\theta)}(X_{n-k}=y)$.

定理1 若 X 是强 π-不可约的,则 $x\in X$ 是弱常返的或者是强暂留的.

证明 若 x 不是强暂留的,则存在 $B\in\boldsymbol{B}^Z$,$\pi B>0$,使得 $\forall\theta\in B$ 有 $G(x,\theta;[E]_x)=\infty$,由 X 是强 π-不可约的,对几乎处处的 $\alpha\in\Theta^Z$,存在 $m\geqslant 1$,使得 $\alpha\in T^{-m}B$,$F^m(x,\alpha;[E]_y)>0$,于是由引理1有:

$$
\begin{aligned}
G(x,\alpha;[E]_x)&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}F^k(x,\alpha;[E]_x)P_{(x,T^k\alpha)}(X_{n-k}=x)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}F^k(x,\alpha;[E]_x)P_{(x,T^k\alpha)}(X_n=x)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}F^k(x,\alpha;[E]_x)+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}F^k(x,\alpha;[E]_x)P_{(x,T^k\alpha)}(X_n=x)=\\
&\sum_{k=1}^{\infty}F^k(x,\alpha;[E]_x)+\sum_{k=1}^{\infty}F^k(x,\alpha;[E]_x)G(x,T^k\alpha;[E]_x)\geqslant\\
&F^m(x,\alpha;[E]_x)G(x,T^m\alpha;[E]_x)=\infty
\end{aligned}
$$

所以 x 是弱常返的,定理得证.

引理2[8] 设 X 是强 π-不可约的,若 x 是正则本质的,则 $x\in X$ 是强常返的.

引理3[4] $x\in X$ 是非本质的充要条件是 $\pi(\theta:Q(x,\theta;[E]_x)=0)=1$.

定理2 设 X 是强 π-不可约的,则 X 强常返的充要条件是 X 是正则本质的.

证明 充分性可由引理2得到.

必要性:假设 $x\in X$ 是非正则本质的,则由引理3存在 $B\in\boldsymbol{B}^Z$,$\pi B>0$,使得对任意的 $\theta\in B$ 有 $\pi(\theta:Q(x,\theta;[E]_x)=0)=1$,于是对几乎处处的 $\theta\in\Theta^Z$,由 X 是强 π-不可约的,存在 $m\geqslant 1$,使得 $\theta\in T^{-m}B$,$F^m(x,\theta;[E]_x)>0$,所以 $Q(x,\theta;[E]_x)=\sum_{n=1}^{\infty}F^n(x,\theta;[E]_x)Q(x,T^n\theta;[E]_x)=0$. 所以 $\pi\{\theta:Q(x,\theta;[E]_x)=0\}=$

1,这与强常返的定义 $\pi\{\theta:Q(x,\theta;[E]_x)=1\}=1$ 矛盾,则 X 是正则本质的.

定理 3　设 X 是强 π-不可约的,如果 X 是常返的,则有 $E_{z,\theta\eta_x}=\infty$,$\pi$-a. e. $\theta\in\Theta^z$,$x,z\in X$.

证明　由于 X 是强 π-不可约的,若对任意的 $z,x\in X$,对几乎处处的 $\theta\in\Theta^Z$,$B\in\boldsymbol{B}^Z$,$\pi B>0$,存在 $m\geqslant1$,使得 $\theta\in T^{-m}B$,$F^m(z,\theta;[E]_x)>0$,于是有:

$$
\begin{aligned}
E_{z,\theta\eta_x}=\sum_{n=1}^{\infty}P_{(z,\theta)}(X_n=x)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\theta_0,\cdots,\theta_{n-1};z,x)=\\
\sum_{n=k}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}F^k(z,\theta;[E]_x)P_{(x,T^k\theta)}(X_{n-k}=x)=\\
\sum_{k=1}^{n}F^k(z,\theta;[E]_x)\sum_{n=0}^{\infty}P_{(x,T^k\theta)}(X_n=x)=\\
\sum_{k=1}^{n}F^k(z,\theta;[E]_x)E_{x,T^k\theta\eta_x}\geqslant\\
F^m(z,\theta;[E]_x)E_{x,T^m\theta\eta_x}=\infty
\end{aligned}
$$

所以 $E_{z,\theta\eta_x}=\infty$. π-a. e. θ, $\theta\in\Theta^z$,$x,z\in X$.

定理 4　设 X 是 π-不可约的,若 X 是强常返的,则 X 是常返的.

证明　由 X 是强常返的,则 $\pi\{\theta:Q(x,\theta;[E]_x)=1\}=1$,令 $B=\{\theta:Q(x,\theta;[E]_x)=1\}$,则对任意的 $\theta\in B$,由 Borel-Cantelli 引理得 $E_{x,\theta\eta_{[E]_x}}=\infty$. 又 X 是 π-不可约的,则对任意的 $\theta\in B^c$,因 $\pi(B)>0$,存在 $m\geqslant1$,使 $\theta\in T^{-m}B$,$P(\theta_0,\cdots,\theta_{m-1};x,x)>0$,从而:

$$
\begin{aligned}
E_{x,\theta\eta[E]_x}=\sum_{n=1}^{\infty}P_{(x,\theta)}(X_n=x)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}P_{(x,\theta)}(X_{n+m}=x)\geqslant\\
\sum_{n=1}^{\infty}P_{(x,\theta)}(X_m=x)P_{(x,T^m\theta)}(X_n=x)=\\
P(\theta_0,\cdots,\theta_{m-1};x,x)\sum_{n=1}^{\infty}P_{(x,T^m\theta)}(X_n=x)=\\
P(\theta_0,\cdots,\theta_{m-1};x,x)E_{x,T^m\theta\eta[E]_x}=\infty
\end{aligned}
$$

所以 X 是常返的.

引理 4[9]　$x\in X$ 是强常返的充要条件是 $\pi(\theta:L(x,\theta;[E]_x)=1)=1$.

引理 5[7]　设 X 是 π-不可约的,若 X 是常返的,则有 $L(x,\theta;[E]_x)=1$,π-a. e. $\theta\in\Theta^Z$,$x\in X$.

定理 5　若 X 是 π-不可约的,则 X 常返与强常返是等价的.

证明可由定理 4,引理 4 和引理 5 得到.

推论 1[10]　设 X 是 π-不可约的,则 X 常返的充要条件是 X 是正则本质的.

参考文献:

[1] COGBUM R. Markov chains in random environments:The case Markovian environments[J]. Ann Probab, 1980, 8(3):908-916
[2] COGBURN R. The ergodic theory of Markov chains in random environments[J]. Z W, 1984,66(2):109-128
[3] OREY S. Markov chains with stochastically stationary transition probabilities[J]. Ann Prob,1991,19(3):907-928
[4] 肖争艳,胡迪鹤. 绕积马氏链的状态分类[J]. 数学物理学报,2003,23A(3):306-313
[5] 胡迪鹤. 从 p—m 链到随机环境中马氏链[J]. 数学年刊,2004,25A(1):65-78
[6] 李应求. 双无限环境中马氏链的存在性和不可约性[J]. 数学物理学报,2001,21A(4):439-442
[7] 李应求. 双无限环境中 Markov 链的常返性和不变测度[J]. 中国科学(A 辑),2001,31(8):702-707
[8] 高振龙,甘建军,胡迪鹤. 随机环境中马氏链的状态性质[J]. 武汉大学学报,2006,52(1):17-20
[9] 李应求. 随机环境中马氏链与两参数马氏过程[R]. 武汉大学博士后研究工作报告,2001
[10] 孔生林. 随机环境中马氏链的常返性和瞬时性[J]. 大学数学,2005,21(4):54-57

Recurrence and Strong Recurrence for Markov Chains in Random Environments

WU Xiao-min

(Department of Mathematics, Xinzhou Normal College, Shanxi Xinzhou 034000, China)

Abstract: In this paper, we introduce the definition about the π-irrdeucibility and strong π-irrdeucibility for Markov chains in random environments. Some criterion that strong π-irrdeucibility Markov chains in random environment are recurrent are given, thereby the sufficient and necessary condition of strong recurrence of strong π-irrdeucibility Markov chains in random environments is obtained. The relation between recurrence and strong recurrence in the condition of strong π-irrdeucibility Markov chains in random environments is discussed.

Key words: random environments; Markov chains; π-irrdeucibility; strong π-irrdeucibility; recurrence; strong recurrence

责任编辑:李翠薇

(上接第 333 页)

可知 A 满足定理 1 的条件,所以根据定理 1 可判断 A 是非奇异 H-矩阵. 但是易知 A 不满足文献[3]定理 2 的条件,所以文献[3]定理 2 的结果不能判定 A 是非奇异 H-矩阵.

参考文献:

[1] 干泰彬,黄廷祝. 非奇异 H-矩阵的实用充分条件[J]. 计算数学,2004(26):109-116

[2] VARGA R S. On Recurring Theorems on Diagonal Dominance[J]. Linear Algebra Appl,1976(13):1-9

[3] 王川龙. H-矩阵的充分条件[J]. 工程数学学报,2000,17(1):123-126

[4] 高中喜,黄廷祝,王广彬. 非奇异 H-矩阵的充分条件[J]. 数学物理学报,2005,25(3):409-413

[5] 郭伟. 广义次正定矩阵的性质[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2007,24(6):533-535

Sufficient Conditions for Nonsingular H-matrices

KUANG De-sheng

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

Abstract: This paper presents several new determining conditions about nonsingular H-matrix, expands the scope of H-matrix to determine, a numerical example is given to show that new result in this paper is more extensive.

Key words: nonsingular H-matrix; strictly diagonally dominant matrix; generalized diagonally dominant matrix

责任编辑:李翠薇