文章编号:1672 -058X(2011)04 -0339 -04

Bernstein-Bezoutian 矩阵的若干性质*

刘 冰, 张羽乾
(合肥工业大学 数学学院,合肥 230009)

摘 要:讨论了 Bernstein-Bezoutian 矩阵一些特殊的性质,包括与友矩阵的缠绕关系、三角分解、广义的 Barnett 分解和广义 Vandermonde 约化等.

关键词:Bernstein-Bezoutian 矩阵;缠绕关系;Barnett 分解;Vandermonde 约化
中图分类号:O151.21 **文献标志码**:A

关于 Bernstein-Bezoutian 矩阵的研究,在文献[1-4]中已经给出了一些重要性质及应用. 文献[6,7]中主要是对幂基下和一般基下的 Vandermonde 矩阵的研究,此处主要用纯代数的方法研究 Bernstein-Bezout 矩阵在 Bernstein 基下的一些性质,包括:Bernstein-Bezout 矩阵的 Barnett 因式分解,与友矩阵的缠绕,与 Bernstein 基下的结式矩阵的关系,以及 Bernstein-Bezout 矩阵的三角分解公式.

定义 1[1,2] 设 $\beta_i^{(k)}(z) = \binom{k}{i}(1-z)^{k-i}z^i\ (1 \leqslant i \leqslant k)$,则称 $\{\beta_0^{(n)}(z), \beta_1^{(n)}(z), \cdots, \beta^{(n)}(z)\}$ 为一组 Bernstein 基.

定义 2[1,2] 设 $p(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i\beta_i^{(n)}(z)$,$q(z) = \sum_{i=0}^{n} q_i\beta_i^{(n)}(z)$,由 $R(x,y) = \dfrac{p(z)q(w) - q(z)p(w)}{z-w} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\beta_{i-1}^{(n-1)}(z)\beta_{j-1}^{(n-1)}(w)$ 所确定的矩阵 $(b_{ij})_{i,j=1}^{n}$ 为多项式 $p(z)$,$q(z)$ 所确定的 Bernstein-Bezoutian 矩阵,记为 $B^{(b)}(p,q)$.

引理 1[1]
$$T_n\begin{bmatrix}\beta_0^{(n)}(z)\\ \beta_1^{(n)}(z)\\ \vdots \\ \beta_n^{(n)}(z)\end{bmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ z\\ \vdots\\ z^n\end{pmatrix}, \text{其中 } T_n = (t_{ij})_{i,j=1}^{n}, \text{且 } t_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{若 } i > j \\ \binom{j-1}{i-1}\binom{n}{i-1}^{-1}, & \text{若 } i \leqslant j \end{cases}.$$

引理 2[1] 令 $B(p,q)$ 为古典 Bezout 矩阵,$B^{(b)}(p,q)$ 为 Bernstein 基下的 H-Bezout,则 $B(p,q) = T_{n-1}^{-t}B^{(b)}(p,q)T_{n-1}^{-1}$.

定义 3[3] 若 $p(z) = \sum_{i=0}^{n} p_i\beta_i^{(n)}(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$,则称 C 和 $M = (F+A)^{-1}A$ 分别为多项式 $p(z)$ 幂基和 Brenstein 基下的友矩阵,其中 $F = \operatorname{diag}\left[\dfrac{n}{1}, \dfrac{n-2}{1}, \cdots, \dfrac{1}{n}\right]$,

收稿日期:2010 -07 -25;修回日期:2010 -12 -09.
* 基金项目:安徽省自然科学基金(No. 090416230).
作者简介:刘冰(1984 -),男,安徽蚌埠人,硕士研究生,从事矩阵论与算子理论研究.

$$C=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ \frac{-a_0}{a_n} & \frac{-a_1}{a_n} & \cdots & \frac{-a_{n-1}}{a_n}\end{bmatrix},A=\begin{bmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ -p_0 & -p_1 & \cdots & -p_{n-1}\end{bmatrix}$$

且 $C=HMH^{-1}$,其中:

$$h_{ij}=\begin{cases}0, & 若\ i>j\\ \left(\frac{m+1-j}{m}\right)\frac{\binom{j-1}{i-1}}{\binom{m-1}{i-1}}, & 若\ i\leqslant j\end{cases}$$

1 Bernstein-Bezoutian 矩阵的一些基本性质

定理 1 Bernstein-bezout 矩阵与矩阵 $\tilde{M}$ 满足以下缠绕关系:$B^{(b)}(p,q)\tilde{M}=\tilde{M}^{\mathrm{T}}B^{(b)}(p,q)$,其中 $\tilde{M}=GMG^{-1}$,$G=T_{n-1}^{-1}H$.

证明 $Bez^{(b)}(p,q)\tilde{M}=\tilde{M}^{\mathrm{T}}Bez^{(b)}(p,q)\Leftrightarrow Bez^{(b)}(p,q)GMG^{-1}=(GMG^{-1})^{\mathrm{T}}Bez^{(b)}(p,q)\Leftrightarrow Bez^{(b)}(p,q)T_{n-1}^{-1}CT_{n-1}=T_{n-1}^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}T_{n-1}^{-\mathrm{T}}Bez^{(b)}(p,q)\Leftrightarrow T_{n-1}^{-\mathrm{T}}Bez^{(b)}(p,q)T_{n-1}^{-1}C=C^{\mathrm{T}}T_{n-1}^{-\mathrm{T}}Bez^{(b)}(p,q)T_{n-1}^{-1}\Leftrightarrow Bez(p,q)C=C^{\mathrm{T}}Bez(p,q)$.

定义 4[5] 定义 $Bez^{(b)}(p,1)$ 为 Bernstein 基下的广义对称化子.

定理 2 (广义的 Barnett 分解公式) $Bez^{(b)}(p,q)=Bez^{(b)}(p,1)Gq(M)G^{-1}$.

证明 $Bez^{(b)}(p,q)=Bez^{(b)}(p,1)Gq(M)G^{-1}\Leftrightarrow Bez^{(b)}(p,q)=T_{n-1}^{\mathrm{T}}Bez_H(p,1)T_{n-1}Gq(M)G^{-1}\Leftrightarrow T_{n-1}^{-\mathrm{T}}Bez^{(b)}(p,q)T_{n-1}^{-1}=Bez(p,1)T_{n-1}Gq(M)G^{-1}T_{n-1}^{-1}\Leftrightarrow Bez(p,q)=Bez(p,1)T_{n-1}Gq(M)G^{-1}T_{n-1}^{-1}\Leftrightarrow Bez(p,q)=Bez(p,1)q(C)$.

定理 3 若多项式 $p(x)$,$f(x)$,$q(x)$ 满足 $\deg f(x)q(x)\leqslant\deg p(x)=n$,那么 $Bez^{(b)}(p,fq)=Bez^{(b)}(p,f)Bez^{(b)}(p,1)^{-1}Bez^{(b)}(p,q)$.

证明 由定理 2 知:

$$\begin{aligned}Bez^{(b)}(p,fq)=&Bez^{(b)}(p,1)G(fq)_{(M)}G^{-1}=\\ &Bez^{(b)}(p,1)Gf(M)G^{-1}Bez^{(b)}(p,1)^{-1}Bez^{(b)}(p,1)Gq(M)G^{-1}=\\ &Bez^{(b)}(p,f)Bez^{(b)}(p,1)^{-1}Bez^{(b)}(p,q)\end{aligned}$$

推论 1 如果多项式 $p(x)f_1(x)$,$f_2(x)$,$\cdots$,$f_k(x)(k\geqslant 2)$,满足 $\deg f_1(x)f_2(x)\cdots f_k(x)\leqslant\deg p(x)=n$,那么 $Bez^{(b)}(p(x),f_1(x),\cdots,f_k(x))=Bez^{(b)}(p,f_1)Bez^{(b)}(p,1)^{-1}\cdots Bez^{(b)}(p,f_k)$.

定义 5[5] R_b 是关于 Bernstein 基下的广义旋转矩阵,$R_b=T_{n-1}^{-1}J_nT_{n-1}^{-\mathrm{T}}$,$R_b^{\mathrm{T}}=R_b$.

定理 4 $Bez^{(b)}(p,q)=Bez^{(b)}(p,1)R_bBez^{(b)}(q,1)(GM_p^n-M_q^nG^{-1})$.

证明 由
$$\begin{aligned}Bez(p,q)=&s(p)J_ns(q)(C_p^n-C_q^n)=Bez(p,1)J_nBez(q,1)(C_p^n-C_q^n)=\\ &T_{n-1}^{-\mathrm{T}}Bez^{(b)}(p,1)T_{n-1}^{-1}J_nT_{n-1}^{-\mathrm{T}}Bez^{(b)}(q,1)T_{n-1}^{-1}(HM_p^nH^{-1}-HM_q^nH^{-1})\Rightarrow\\ &T_{n-1}^{\mathrm{T}}Bez(p,q)T_{n-1}=Bez^{(b)}(p,1)T_{n-1}^{-1}J_nT_{n-1}^{-1}Bez^{(b)}(q,1)(GM_p^n-M_q^nG^{-1})\Rightarrow\\ &Bez^{(b)}(p,q)=Bez^{(b)}(p,1)R_bBez^{(b)}(q,1)(GM_p^n-M_q^nG^{-1})\end{aligned}$$

2 Bernstein-Bezoutian 矩阵的三角分解

定义 6 设 $p(x)=\sum_{i=0}^{m}p_i\beta_i^{(m)}(x)$,$q(x)=\sum_{i=0}^{n}q_i\beta_i^{(n)}(x)$,定义 $Res_b(p,q)=\begin{pmatrix}M_n^{\mathrm{T}}(P)\\ M_m^{\mathrm{T}}(q)\end{pmatrix}$ 为 Bernstein 基下的结式矩阵,其中:

$$M_n^{\mathrm{T}}(P)=\begin{pmatrix} p_0\binom{m}{0}\binom{n-1}{0} & p_1\binom{m}{1}\binom{n-1}{0} & \cdots & p_m\binom{m}{m}\binom{n-1}{0} & \cdots & 0 \\ 0 & p_0\binom{m}{0}\binom{n-1}{1} & p_1\binom{m}{1}\binom{n-1}{1} & \cdots & p_m\binom{m}{m}\binom{n-1}{1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_0\binom{m}{0}\binom{n-1}{n-1} & p_1\binom{m}{1}\binom{n-1}{n-1} & \cdots & p_m\binom{m}{m}\binom{n-1}{n-1} \end{pmatrix}D$$

其中 $D=\mathrm{diag}\left(\binom{m+n-1}{0}^{-1},\binom{m+n-1}{1}^{-1},\cdots,\binom{m+n-1}{m+n-1}^{-1}\right)$.

定理 5　设实多项式 $U(t)=\sum_{i=0}^{n}u_i\beta_i^{(n)}(t)$，$V(t)=\sum_{i=0}^{n}v_i\beta_i^{(n)}(t)$ 且 $U(t)=p(t)U_1(t)$，$V(t)=p(t)V_1(t)$，并且 $\deg(U_1(t))=n_1$，$\deg(V_1(t))=n_1$，$\deg(p(t))=n_2$，且 $n_1+n_2=n$，则 $Bez^{(b)}(U,V)=M_{n_1}(p)Bez^{(b)}(U_1,V_1)M_{n_2}^{\mathrm{T}}(p)$.

证明

$$\beta(t,s)=\frac{U(t)V(s)-V(t)U(s)}{t-s}=p(t)\frac{U_1(t)V_1(s)-V_1(t)U_1(s)}{t-s}p(s)=$$

$$p(t)[\beta_0^{(n_1-1)}(t),\beta_1^{(n_1-1)}(t),\cdots,\beta_{n_1-1}^{(n_1-1)}(t)]Bez^{(b)}(U_1,V_1)\begin{bmatrix}\beta_0^{(n_1-1)}(s)\\ \beta_1^{(n_1-1)}(s)\\ \vdots \\ \beta_{n_1-1}^{(n_1-1)}(s)\end{bmatrix}p(s)$$

因为 $p(t)=\sum_{i=0}^{n_2}p_i\beta_i^{(n_2)}(t)$，所以：

$$p(t)\beta_j^{(n_1-1)}(t)=\sum_{i=0}^{n_2}p_i\beta_i^{(n_2)}(t)\beta_j^{(n_1-1)}(t)=$$

$$[p_0\beta_0^{(n_2)}(t)+p_1\beta_1^{(n_2)}(t)+\cdots+p_{n_2}\beta_{n_2}^{(n_2)}(t)]\beta_j^{(n_1-1)}(t)=$$

$$p_0\binom{n_2}{0}\binom{n_1-1}{j}\binom{n-1}{j}^{-1}\beta_0^{(n-1)}(t)+p_1\binom{n_2}{1}\binom{n_1-1}{j}\binom{n-1}{j+1}^{-1}\beta_1^{(n-1)}(t)+\cdots+$$

$$p_{n_2}\binom{n_2}{n_2}\binom{n_1-1}{j}\binom{n-1}{n_2+j}^{-1}\beta_{n_2}^{(n-1)}(t)p(t)\beta_1^{(n_1-1)}(t)\quad(j=0,1,\cdots,n_1-1)$$

由上面的分析以及定义 6，可以得出：

$$p(t)[\beta_0^{(n_1-1)}(t),\beta_1^{(n_1-1)}(t),\cdots,\beta_{n_1-1}^{(n_1-1)}(t)]=[\beta_0^{(n_1-1)}(t),\beta_1^{(n_1-1)}(t),\cdots,\beta_{n_1-1}^{(n_1-1)}(t)]M_{n_1}(p)$$

同理可以得出 $\begin{bmatrix}\beta_0^{(n_1-1)}(s)\\ \beta_1^{(n_1-1)}(s)\\ \vdots \\ \beta_{n_1-1}^{(n_1-1)}(s)\end{bmatrix}p(s)=M_{n_2}^{\mathrm{T}}(p)\begin{bmatrix}\beta_0^{(n_1-1)}(s)\\ \beta_1^{(n_1-1)}(s)\\ \vdots \\ \beta_{n_1-1}^{(n_1-1)}(s)\end{bmatrix}$. 由上面的证明可以得证定理 5.

定理 6　设实多项式 $U(t)=\sum_{i=0}^{n}u_i\beta_i^{(n)}(t)$，$V(t)=\sum_{i=0}^{n}v_i\beta_i^{(n)}(t)$，$U(t)=U_1(t)U_2(t)$，$V(t)=V_1(t)V_2(t)$，$\deg(U_i,V_i)=n_i(i=1,2)$，且 $n_1+n_2=n$，则 $Bez_H^{(b)}(U,V)=Res^{\mathrm{T}}(U_2,V_1)\begin{pmatrix}Bez_H^{(b)}(U_1,V_1) & \\ & Bez_H^{(b)}(U_1,V_1)\end{pmatrix}Res(V_2,U_1)$.

证明　$$\beta(t,s)=\frac{U(t)V(s)-V(t)U(s)}{t-s}=$$

$$\frac{U_1(t)U_2(t)V_1(s)V_2(s)-V_1(t)V_2(t)U_1(s)U_2(s)}{t-s}=$$

$$U_2(t)\frac{U_1(t)V_1(s)-V_1(t)U_1(s)}{t-s}V_2(s)+V_1(t)\frac{U_2(t)V_2(s)-V_2(t)U_2(s)}{t-s}U_1(s)$$

则 $Bez^{(b)}(U,V)=M_{n_1}(U_2)Bez^{(b)}(U_1,V_1)M_{n_1}^{\mathrm{T}}(V_2)+M_{n_1}(V_1)Bez^{(b)}(U_2,V_2)M_{n_1}^{\mathrm{T}}(U_1)=$

$$(M_{n_1}(U_2),M_{n_1}(V_1))\begin{pmatrix}Bez^{(b)}(U_1,V_1) & \\ & Bez^{(b)}(U_1,V_1)\end{pmatrix}\begin{bmatrix}M_{n_1}^{\mathrm{T}}(V_2)\\ M_{n_1}^{\mathrm{T}}(U_1)\end{bmatrix}=$$

$$Res^{\mathrm{T}}(U_2,V_1)\begin{pmatrix}Bez^{(b)}(U_1,V_1) & \\ & Bez^{(b)}(U_1,V_1)\end{pmatrix}Res(V_2,U_1)$$

3 Vandermonde 对角化

定理 7 设 $g(x)$ 有 n 个非零单根 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$, Bernstein 基下 Vandermonde 的矩阵为: $V_1=\begin{pmatrix}\beta_0^{(n-1)}(\lambda_1) & \beta_0^{(n-1)}(\lambda_2) & \cdots & \beta_0^{(n-1)}(\lambda_n)\\ \beta_1^{(n-1)}(\lambda_1) & \beta_1^{(n-1)}(\lambda_2) & \cdots & \beta_1^{(n-1)}(\lambda_n)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \beta_{n-1}^{(n-1)}(\lambda_1) & \beta_{n-1}^{(n-1)}(\lambda_2) & \cdots & \beta_{n-1}^{(n-1)}(\lambda_n)\end{pmatrix}$,则 $V_1^{\mathrm{T}}Bez_H^{(b)}V_1=\mathrm{diag}(r_i)_{i=1}^n$ 其中 $r_i=g'(\lambda_i)h(\lambda_i)$.

证明 $V_1^{\mathrm{T}}Bez_H^{(b)}V_1=V_1^{\mathrm{T}}T_{n-1}^{\mathrm{T}}Bez(g,h)T_{n-1}V_1=V^{\mathrm{T}}Bez(g,h)V=\mathrm{diag}(r_i)_{i=1}^n$.

定理 8 令 $g(x)$,$h(x)$ 互素,则存在 Vandermonde 矩阵 V_1,使得 $V_1^{\mathrm{T}}Bez_H^{(b)}(g,h)V_1$ 为一个对角阵.

参考文献:

[1] BINI D,GEMIGNANI L. Bernstein – Bezoutian matrices[J]. Theoretical Computer Science,2004,315:319-333
[2] JOAB R, WINKLER. A companion matrix resultant for Bernstein polynomials[J]. Linear Algebra and its Applications, 2003, 362:153-175
[3] JOAB R, WINKLE R. A unified approach to resultant matrices for Bernstein basis polynomials[J]. Computer Aided Geometric Design,2007(09):4
[4] ANA M. Bernstein-Bezoutian matrices and curve implicitization[J]. Theoretical Computer Science, 2007,377:65-72
[5] 陈公宁. 矩阵理论与应用[M]. 北京:高等教育出版社,1990
[6] CNEH Q G, YANG ZH H. Bezoutian Representation via Vandermonde Matrices[J]. Linear Algebra Appl,1993,186:37-44
[7] SANSIGER G,ALVAREZ M. On Bezoutian reduction with the Vandermonde matrix[J]. Linear Algebra Appl,1989,121:401-408
[8] 王其林. 关于"正交矩阵的特征多项式及特征根"的注[J]. 四川兵工学报,2011,32(4):154-155

Some Properties of Bernstein-Bezoutian Matrix

LIU Bing, ZHANG Yu-qian
(School of Mathematics, Hefei University of Technology, Hefei 230009, China)

Abstract: In this paper, some special properties of Bernstein-Bezoutian Matrix are studied, such as twine relationship between Bernstein-Bezoutian Matrix and Companion Matrix; triangular factorization; generalization Barnett factorization; generalization Vandermonde simplification and so on.

Key words: Bernstein-Bezoutian Matrix; twine relationship; Barnett factorization; Vandermonde simplification

责任编辑:李翠薇