文章编号:1672-058X(2011)04-0334-05

二阶时滞微分方程周期解的存在唯一性及数值解法

殷雪剑[1], 路召飞[2]
(1. 安徽大学 数学科学学院,合肥 230039;2. 太原科技大学 应用科学学院,太原 030024)

摘　要:证明了二阶时滞微分方程的周期解存在唯一的一个充分条件,讨论了其周期解的数值解法:利用数值微分和线性插值对微分方程进行离散,得到非线性方程组,再用牛顿法求解;最后给出了实例,说明了方法的有效性.

关键词:二阶时滞微分方程;周期解;唯一性;牛顿法
中图分类号:O221.1　　**文献标志码**: A

二阶时滞微分方程是二阶非线性微分方程中很常见的一种,它在动力学系统中有重要的应用[1]. Duffing 型方程具有较强的应用背景,特别是 Duffing 型方程周期解存在性和唯一性的研究一直是热点,已有很多研究成果,如文献[2-3],对时滞 Duffing 型方程数值解的研究也不少,如文献[4-6],但对二阶时滞微分方程的研究却很少见. 此处利用文献[7]中的一个引理给出了二阶时滞微分方程周期解存在唯一的充分条件,然后给出周期解的一个数值解法,最后给出实例说明该数值方法的有效性.

1　周期解存在唯一的充分条件

考虑如下二阶时滞微分方程:

$$ax''(t)+bx'(t)+cx(t)+g(x(t-\tau))=f(t) \tag{1}$$

其中,a,b,c 为常数,$g(x)$,$f(t)$是定义在 R 上的实连续函数,且$f(t)$是 T-周期函数.

引理 1[7]　设 $T\|A\|<2\pi$, $\det A\neq 0$,且存在李普希兹常数 $L\geqslant 0$,使得:

$$\|F(t,X_1)-F(t,X_2)\|\leqslant L\|X_1-X_2\|,\ \forall t\in R, X_1,X_2\in R^n \text{ 及:}$$

$$L^2\left\{\|A^{-1}\|^2+\frac{2T^2}{(2\pi-T\|A\|)^2}+\frac{T^2}{12}\right\}<1 \tag{2}$$

成立,则方程(2)存在唯一 T-周期解,其中$\|A\|$是向量范数$\|X\|$诱导的算子范数.

定理 1　设方程(1)中的函数 $g(\cdot)$满足李普希兹条件,即存在常数 $K\geqslant 0$,使得$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant K|x_1-x_2|$, $\forall x_1,x_2\in R$,下面分3种情况:

1) 设$0<|b|\leqslant|a|\leqslant|c|$或$0<|a|\leqslant|b|\leqslant|c|$,若$|c|T<2|a|\pi$,且:

$$K^2\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{2T^2}{(2\pi|a|-T|c|)^2}+\frac{T^2}{12a^2}\right\}<1 \tag{3}$$

成立,则方程(1)存在唯一的 T-周期解.

2) 设$0<|b|\leqslant|c|\leqslant|a|$或$0<|c|\leqslant|b|\leqslant|a|$,若$0<T<2\pi$,且:

$$K^2\left\{\frac{1}{c^2}+\frac{2T^2}{a^2(2\pi-T)^2}+\frac{T^2}{12a^2}\right\}<1 \tag{4}$$

成立,则方程(1)存在唯一的 T-周期解.

3) 设$0<|c|\leqslant|a|\leqslant|b|$或$0<|a|\leqslant|c|\leqslant|b|$,若$|b|T<2|a|T$,且:

收稿日期:2010-10-22;**修回日期**:2010-11-20.
作者简介:殷雪剑(1984-),女,安徽宿州人,硕士研究生,从事微分方程稳定性研究.

$$K^2\left\{\frac{b^2}{a^2c^2}+\frac{2T^2}{(2\pi|a|-T|b|)^2}+\frac{T^2}{12a^2}\right\}<1 \tag{5}$$

成立,则方程(1)存在唯一的 T - 周期解.

证明　令 $x_1(t)=x(t)$,$x_2(t)=x'(t)$,则 $x'_1(t)=x_2(t)$,方程(1)化为方程组:

$$\begin{cases} x'_1(t)=x_2(t) \\ x'_2(t)=-\dfrac{b}{a}x_2(t)-\dfrac{c}{a}x_1(t)-\dfrac{g(x_1(t-\tau))}{a}+\dfrac{f(t)}{a} \end{cases}$$

改写成矩阵形式为:

$$\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{f(t)-g(x_1)}{a} \end{pmatrix}$$

令 $X(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$,$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix}$,$F(t,X)=\begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{f(t)-g(x_1)}{a} \end{pmatrix}$,则方程可改写为:$X'=AX+F(t,X(t-\tau))$.

由于 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{c}{a} & -\dfrac{b}{a} \end{pmatrix}$,有 $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\dfrac{b}{c} & -\dfrac{a}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,所以,有 $\|A\|=\max\left\{1,\left|\dfrac{c}{a}\right|,\left|\dfrac{b}{a}\right|\right\}$,$\|A^{-1}\|=\max\left\{1,\left|\dfrac{b}{c}\right|,\left|\dfrac{a}{c}\right|\right\}$. $\forall t\in R$,$X_1=(x_1,y_1)^{\mathrm{T}}\in R^2$,$X_2=(x_2,y_2)^{\mathrm{T}}\in R^2$,因此,有 $\|F(t,X_1)-F(t,X_2)\|=\dfrac{|g(x_1)-g(x_2)|}{|a|}\leqslant\dfrac{K}{|a|}|x_1-x_2|\leqslant\dfrac{K}{|a|}|X_1-X_2|$,$L=\dfrac{K}{|a|}$. 当 $0<|b|\leqslant|a|\leqslant|c|$ 或 $0<|a|\leqslant|b|\leqslant|c|$,有 $\|A\|=\left|\dfrac{c}{a}\right|$,$\|A^{-1}\|=1$,由 $|c|T<2|a|\pi$,得 $\left|\dfrac{c}{a}\right|T<2\pi$,即 $T\|A\|<2\pi$,注意到 $L=\dfrac{K}{|a|}$,则当式(3)成立时,有:

$$L^2\left\{\|A^{-1}\|^2+\frac{2T^2}{(2\pi-T\|A\|)^2}+\frac{T^2}{12}\right\}=\frac{K^2}{a^2}\left\{1+\frac{2T^2}{\left(2\pi-T\left|\frac{c}{a}\right|\right)^2}+\frac{T^2}{12}\right\}=$$

$$K^2\left\{\frac{1}{a^2}+\frac{2T^2}{(2\pi|a|-T|c|)^2}+\frac{T^2}{12a^2}\right\}<1$$

即式(2)成立,则方程(1)存在唯一的 T - 周期解.

当 $0<|b|\leqslant|c|\leqslant|a|$ 或 $0<|c|\leqslant|b|\leqslant|a|$,有 $\|A\|=1$,$\|A^{-1}\|=\left|\dfrac{a}{c}\right|$,由 $0<T<2\pi$,得 $T\|A\|<2\pi$,即 $T\|A\|<2\pi$,注意到 $L=\dfrac{K}{|a|}$,则当式(4)成立时,有:

$$L^2\left\{\|A^{-1}\|^2+\frac{2T^2}{(2\pi-T\|A\|)^2}+\frac{T^2}{12}\right\}=\frac{K^2}{a^2}\left\{\frac{a^2}{c^2}+\frac{2T^2}{(2\pi-T)^2}+\frac{T^2}{12}\right\}=$$

$$K^2\left\{\frac{1}{c^2}+\frac{2T^2}{a^2(2\pi-T)^2}+\frac{T^2}{12a^2}\right\}<1$$

即式(2)成立,则方程(1)存在唯一的 T-周期解.

当 $0<|c|\leqslant|a|\leqslant|b|$ 或 $0<|a|\leqslant|c|\leqslant|b|$,有 $\|A\|=\left|\dfrac{b}{a}\right|$,$\|A^{-1}\|=\left|\dfrac{b}{c}\right|$,由 $|b|T<2|a|\pi$,得 $\left|\dfrac{b}{a}\right|T<2\pi$,即 $T\|A\|<2\pi$,注意到 $L=\dfrac{K}{|a|}$,则当式(5)成立时,有:

$$L^2\left\{\|A^{-1}\|^2+\frac{2T^2}{(2\pi-T\|A\|)^2}+\frac{T^2}{12}\right\}=\frac{K^2}{a^2}\left\{\frac{b^2}{c^2}+\frac{2T^2}{\left(2\pi-T\left|\frac{b}{a}\right|\right)^2}+\frac{T^2}{12}\right\}=$$

$$K^2\left\{\frac{b^2}{a^2c^2}+\frac{2T^2}{(2\pi|a|-T|b|)^2}+\frac{T^2}{12a^2}\right\}<1$$

即式(2)成立,因此方程(1)存在唯一的 T - 周期解.

2 周期解的数值解法

2.1 微分方程的离散

下面用中心插商和线性插值把方程(1)离散成非线性方程组.

由于解的周期为 T,可考虑区间$[0,T]$求解该问题,把$[0,T]$分成 n 等份,即取节点 $t_i=\dfrac{(i-1)T}{n}$,$i=1,2,\cdots,n$,将一,二阶导数用中心差商来代替,有:

$$x''(t_i)=\frac{x(t_{i-1})-2x(t_i)+x(t_{i+1})}{h^2}+O(h^2)\approx\frac{x(t_{i-1})-2x(t_i)+x(t_{i+1})}{h^2}$$

$$x'(t_i)=\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{h}+O(h)\approx\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{h}$$

其中,$h=\dfrac{T}{n}$,$O(h^2)$,$O(h)$为误差,得到方程(1)的近似形式如下:

$$\begin{cases}\dfrac{a(x_n-2x_1+x_2)}{h^2}+\dfrac{b(x_2-x_1)}{h}+cx_1+g(x(t_1-\tau))=f(t_1)\\ \dfrac{a(x_{i-1}-2x_i+x_{i+1})}{h^2}+\dfrac{b(x_{i+1}-x_i)}{h}+cx_i+g(x(t_i-\tau))=f(t_i)\\ \dfrac{a(x_{n-1}-2x_n+x_1)}{h^2}+\dfrac{b(x_1-x_n)}{h}+cx_n+g(x(t_n-\tau))=f(t_n)\end{cases}\tag{6}$$

其中,x_i 表示 $x(t_i)$的近似值,$i=2,\cdots,n-1$,方程组(7)中利用了 $x_0=x_n$,$x_{n+1}=x_1$,$x(t_i-\tau)$还需做近似,这里采用线性插值法,具体如下:

设 $m=\left|\dfrac{\tau}{h}\right|+1$,其中符号$|a|$表示不超过 a 的最大整数,即 $\tau=mh-\left(m-\dfrac{\tau}{h}\right)h$ 在 x_m 与 x_{m+1}之间,当 $i\geqslant m+1$ 时,有 $x_i-\tau=(i-m-1)h+\left(m-\dfrac{\tau}{h}\right)h$,在 x_{i-m}与 x_{i-m+1}之间,定义:

$$K(i)=\begin{cases}i-m,i=m+1,m+2,\cdots,n\\ i-m+n,i=1,2,\cdots,m\end{cases}\tag{7}$$

利用 $x(t)$在 $t_{K(i)}$,$t_{K(i)+1}$处的函数值对 $x(t_i-\tau)$进行线性插值,得 $x(t_i-\tau)=ax_{K(i)}+bx_{K(i)+1}+O(h^2)\approx\alpha x_{K(i)}+\beta x_{K(i)+1}$,其中 $\beta=m-\dfrac{\tau}{h}$,$\alpha=1-\beta$,于是 $g(x(t_i-\tau))=g(ax_{K(i)}+bx_{K(i)+1}+O(h^2))\approx g(\alpha x_{K(i)}+\beta x_{K(i)+1})$.

令 $g_i=g(\alpha x_{K(i)}+\beta x_{K(i)+1})$,并引进记号:$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$g(x)=(g_1,g_2,\cdots,g_n)^{\mathrm{T}}$,$f=(f(t_1),f(t_2),\cdots,f(t_n))^{\mathrm{T}}$及:

$$C=\begin{pmatrix}c-\frac{b}{h}-\frac{2a}{h^2} & \frac{a}{h^2}+\frac{b}{h} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a}{h^2}+\frac{b}{h}\\ \frac{a}{h^2} & c-\frac{b}{h}-\frac{2a}{h^2} & \frac{a}{h^2}+\frac{b}{h} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{a}{h^2} & c-\frac{b}{h}-\frac{2a}{h^2} & \frac{a}{h^2}+\frac{b}{h} & \vdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & c-\frac{b}{h}-\frac{2a}{h^2} & \frac{a}{h^2}+\frac{b}{h}\\ \frac{a}{h^2}+\frac{b}{h} & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a}{h^2} & c-\frac{b}{h}-\frac{2a}{h^2}\end{pmatrix}$$

可得方程组(6)的紧凑形式为:

$$Cx+g(x)=f\tag{8}$$

由于二阶中心插商的误差和线性插值的误差是 $O(h^2)$[7],而一阶中心插商的误差是 $O(h)$,从而可以预知由方程组(8)得到的数值解的误差与 $O(h^2)$ 和 $O(h)$ 有关.

2.2　牛顿法求解

牛顿法是解非线性方程组的 $F(x)=0(x\in R^n, F:R^n\to R^n)$ 的常用方法之一[8],此处用 $C^{-1}f$ 作为初始解,应用牛顿法求解方程组(8)的步骤如下:

1) 求解 $Cx^{(0)}=f$,得到 $x^{(0)}$,即先不考虑方程组(8)中的非线性项,由于 C 是稀疏的循环矩阵,这一步的计算量为 $O(n)$,令 $q=0$;

2) 计算 $F(x^{(q)})=Cx^{(q)}+g(x^{(q)})-f$ 及任意向量范数 $\|F(x^{(q)})\|$,若 $\|F(x^{(q)})\|<\varepsilon$,其中 ε 为事先给定的充分小的正数,则 $\tilde{x}=x^{(q)}$ 即为所求的近似解,计算结束,否则转 3);

3) 计算 $F'(x^{(q)})=C+\mathrm{diag}(g'_1,g'_2,\cdots,g'_n)C_1$,其中 $g_i'=g'(x)|x=\alpha x^{(q)}_{K(i)}+\beta x^{(q)}_{K(i)+1}$,$C_1$ 为稀疏循环矩阵,且:

$$[C_1]_{i,j}=\begin{cases}\alpha, j-i=n-m \text{ 或 } j-i=-m\\ \beta, j-i=n-m+1 \text{ 或 } j-i=-m+1\end{cases}$$

4) 求解 $F'(x^{(q)})\Delta x^{(q)}=F(x^{(q)})$,令 $x^{(q+1)}=x^{(q)}-\Delta x^{(q)}$,用 $q+1$ 代替 q,转 2). 由于 C 和 C_1 都是稀疏矩阵,从而 $F'(x^{(q)})$ 也是稀疏矩阵;牛顿法的每一步迭代计算量为 $O(n)$;为了防止出现无法终止的情况,可以事先指定最高迭代次数.

3　数值算例

例 1　用数值方法求方程:$ax''(t)+bx'(t)+cx(t)+\sin(0.2x(t-\tau))=(-4a+c)\sin(2t)+2b\cos(2t)+\sin(0.2\sin(2(t-\tau)))$ 的周期解,其中 a,b,c,τ 为参数,$g(x)=\sin(0.2x)$ 满足李普希兹条件,常数 K = 0.2,确解为 $x(t)=\sin(2t)$.

尝试用不同的参数 a,b,c,τ 及步长 h 代入计算,取 $\varepsilon=1.0e-6$,所需的迭代次数及数值解的部分误差如表 1 所示,其中误差 $e=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\tilde{x}_i-\sin(2t_i)|$ 表示精确解和数值解的最大误差,次数 q 表示牛顿法所需的迭代次数.

表 1　各参数下迭代次数及数值误差

	$\left(4,2,2,\frac{\pi}{3}\right)$		$\left(1,2,4,\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)$		$\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{1}{5},\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)$	
h	q	e	q	e	q	e
$\frac{\pi}{64}$	1	6.10e-2	2	7.95e-2	2	5.50e-2
$\frac{\pi}{128}$	1	3.08e-2	2	3.98e-2	2	2.79e-2
$\frac{\pi}{256}$	1	1.55e-2	2	1.99e-2	2	1.40e-2
$\frac{\pi}{512}$	1	7.70e-3	2	1.00e-2	2	7.00e-3
$\frac{\pi}{1\,024}$	1	3.90e-3	2	5.00e-3	2	3.50e-3

数值解的误差与 $O(h^2)$ 和 $O(h)$ 有关,结果与前面的分析吻合,牛顿法的收敛很快,所选的初始解是有效的. 图 1 是 $(a,b,c,\tau)=\left(4,2,2,\frac{\pi}{3}\right)$,$n=1\,024$ 时的数值解图形,从图 1 中可看到周期性.

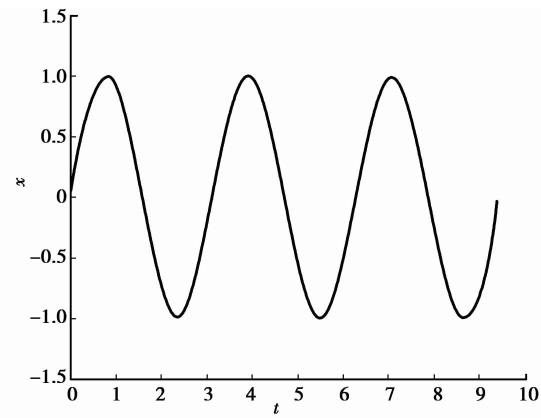

图1 近似解图形

4 结 语

讨论了一类时滞 Duffing 型方程周期解的存在唯一性和数值解法,其数值方法涉及数值微分和线性插值,并且数值分析结果表明此处提出的数值解法是有效的,但关于牛顿法的收敛性,没有从理论上分析,需要继续研究.

参考文献:

[1] 郑祖庥. 泛函微分方程理论[M]. 合肥:安徽教育出版社,1993

[2] 张正球. 庾建设. 一类时滞 Duffing 型方程周期解[J]. 高校应用数学学报 A 辑,1998,13(4):389-392

[3] 马世旺,庾建设,王志成. 拟线性泛函微分方程周期解的存在唯一性[J]. 数学年刊,2001,22(A):105-110

[4] 许敏. 非线性微分方程边值问题周期解的研究[D]. 南京:南京信息工程大学,2006

[5] 徐庆. 用微分连续法求解 Duffing 型方程的 2π 周期解[J]. 吉林大学学报:自然科学版,1990(3):1-6

[6] 林福荣,杨丽伟. 一类时滞 Duffing 型方程周期解的存在唯一性及数值解法[J]. 汕头大学学报,2008,23(3):14-19

[7] 唐美兰,刘新歌,郭水霞. 时滞 Duffing 型微分方程周期解的存在唯一性[J]. 纯粹数学与应用数学,2005,21(2):99-102

[8] 李庆扬,莫孜中,祁力群. 非线性方程组的数值解法[M]. 北京:科学出版社,1987

[9] 周富照,张艳丽. 多项式预条件求解一类矩阵方程[J]. 重庆理工大学学报:自然科学版,2011,25(3):102-107

Existence and Uniqueness of Periodic Solution to Second-order Delay Differential Equations with a Numerical Solution Method

YIN Xue-jian[1], LU Zhao-fei[2]

(1. School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230039, China;
2. School of Applied Science, Taiyuan University of Science and Technology, Taiyuan 030024, China)

Abstract: In this paper, a sufficient condition for existence and uniqueness of periodic solution to second-order delay differential equations is proved and numerical solution of its periodic solution is discussed. Numerical differential and linear interpolation are used to discretize the differential equation and linear equations set is obtained, then Newton method is used for the solution. Finally, an example illustrates the effectiveness of the method .

Key words: second-order delay differential equations; periodic solution; uniqueness; Newton method

责任编辑:李翠薇