文章编号:1672－058X(2011)04－0331－03

非奇异 H-矩阵的充分条件*

匡德胜
(重庆大学 数学与统计学院,重庆 400044)

摘　要:给出了几个非奇异 H-矩阵的新的实用判定条件,扩大了 H-矩阵判定的范围,并用数值算例说明了结果判定范围的广泛性.

关键词:非奇异 H-矩阵;严格对角占优矩阵;广义对角占优矩阵

中图分类号:O151.21　　**文献标志码:** A

非奇异 H-矩阵在数学、物理学等领域中有着广泛的应用,然而它的判别式是很困难的. 此处给出了 H-矩阵的一些简捷判据,扩展了非奇异 H-矩阵的简捷判据的范围.

定义 1[1]　设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$,如果 A 不可约并满足 $|a_{ii}|\geqslant \wedge_i(A)(i=1,2,\cdots,n)$ 且至少有一个严格不等式成立,则称 A 为不可约对角占优矩阵.

引理 1[2]　设 $A=(a_{ij})\in M_n(C)$,如果 A 为不可约对角占优矩阵,则 A 为非奇异 H-矩阵.

1　定理及其证明

定理 1　设 $A\in M_n(C)$, $r=\max\limits_{i\in N_2}\dfrac{\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|}$, $\forall j\in N_1$, $\forall i\in N_2$, $|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|>0$,若:

$$\left(r-\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\frac{r}{|a_{ii}|}\right)\left(|a_{ii}|-\sum_{\substack{t\in N_2\\ t\neq i}}|a_{it}|\right)>\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{r}{|a_{ii}|}\tag{1}$$

则 A 是非奇异 H-矩阵.

证明　设 $\wedge_i(A)\neq 0$,记:

$$M_j=\frac{\left(r-\sum\limits_{t\in N_1}|a_{jt}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}\right)}{\sum\limits_{t\in N_2}|a_{jt}|},\ \forall j\in N_1\tag{2}$$

$$m_i=\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}}{\left(|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{t\in N_2\\ t\neq i}}|a_{it}|\right)},\ \forall i\in N_2\tag{3}$$

由式(1)和 N_2 的定义知,$m_i\geqslant 0$,$M_j>0$,$\forall i\in N_2$,$\forall j\in N_1$. 当 $\sum\limits_{t\in N_2}|a_{jt}|=0$ 时,记 $M_j=+\infty$,,又由式(1)知 $M_j>m_i$,$\forall i\in N_2$,$\forall j\in N_1$. 因而,存在充分小的正数 ε,使 $0\leqslant\max\limits_{i\in N_2}m_i<\max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon<\min\limits_{j\in N_1}M_j$,构造正对角矩阵 $D=\operatorname{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,其中:

收稿日期:2010－09－02;**修回日期:**2010－10－14.
*　**基金项目:**重庆市教委基金项目(项目编号:09－3－029).

作者简介:匡德胜(1984－),男,山东临沂人,硕士研究生,从事矩阵理论研究.

$$d_i=\begin{cases}\dfrac{r}{|a_{ii}|}, & \forall i\in N_1\\ \max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon, & \forall i\in N_2\end{cases}$$

下面证明 $B=AD$ 严格对角矩阵.

1）当 $\forall i\in N_1$ 时,$|b_{ii}|=|a_{ii}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}=r$,$\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|d_j+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|d_j=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|(\max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon)$. 当 $\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|=0$ 时,$\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}<r=|b_{ii}|$. 当 $\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\neq 0$ 时,$\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|d_j+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|d_j=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|(\max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon)<\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\min\limits_{j\in N_1}M_j<\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|M_j$. 由 M_j 的定义可知 $\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|M_j=r$,所以 $\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|<r=|b_{ii}|$.

2）当 $\forall i\in N_2$ 时,$|b_{ii}|=|a_{ii}|(\max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon)$,$\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|d_j+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|d_j=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|(\max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon)$. 则 $|b_{ii}|-\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|=|a_{ii}|(\max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon)-\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|(\max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon)=(|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|)(\max\limits_{i\in N_2}m_i+\varepsilon)-\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}>(|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|)m_i-\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}$. 由 m_i 的定义可知 $(|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|)m_i=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}$,所以 $|b_{ii}|-\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|>0$ 即 $|b_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|$. 综上所述:对任意的 $i\in N$,有 $|b_{ii}|>\sum\limits_{\substack{j\in N\\ j\neq i}}|b_{ij}|$. 因此 B 是严格对角占优矩阵,从而 A 是非奇异 H- 矩阵.

定理 2 设 $A\in M_n(C)$ 为不可约矩阵,$r=\max\limits_{i\in N_2}\dfrac{\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|}{|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|}$, $\forall j\in N_1$, $\forall i\in N_2$, $|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|>0$. 若:

$$\left(r-\sum_{t\in N_1}|a_{jt}|\frac{r}{|a_{ii}|}\right)(|a_{ii}|-\sum_{\substack{t\in N_2\\ t\neq i}}|a_{it}|)\geqslant\sum_{t\in N_2}|a_{jt}|\sum_{t\in N_1}|a_{it}|\frac{r}{|a_{ii}|}\tag{4}$$

且式(4)中至少有一严格不等式成立,则 A 是非奇异 H-矩阵.

证明 设 $\wedge_i(A)\neq 0$,记:

$$M_j=\frac{r-\sum\limits_{t\in N_1}|a_{jt}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}}{\sum\limits_{t\in N_2}|a_{jt}|},\forall j\in N_1\tag{5}$$

$$m_i=\frac{\sum\limits_{t\in N_1}|a_{it}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}}{(|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{t\in N_2\\ t\neq i}}|a_{it}|)},\forall i\in N_2\tag{6}$$

当 $\sum\limits_{t\in N_2}|a_{jt}|=0$ 时,记 $M_j=+\infty$, $\forall j\in N_1$,又有式(4) 知 $M_j\geqslant m_i$, $\forall i\in N_2$, $\forall j\in N_1$,且至少有一严格不等式成立,因此 $\max\limits_{i\in N_2}m_i=\min\limits_{j\in N_1}M_j$,下面构造正对角矩阵 $D=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$,其中 $d_i=\begin{cases}\dfrac{r}{|a_{ii}|},\forall i\in N_1\\ \max\limits_{i\in N_2}m_i,\forall i\in N_2\end{cases}$

1) 当 $\forall i\in N_1$ 时, $|b_{ii}|=|a_{ii}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}=r$, 有:

$$\sum_{j\neq i}|b_{ij}|=\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|d_j+\sum_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|d_j=\sum_{j\in N_1}|a_{ij}|\frac{r}{|a_{ii}|}+\sum_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\max_{i\in N_2}m_i \tag{7}$$

由式(4)和式(7)可知 $|b_{ii}|\geqslant\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|$. 当 $\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\neq 0$ 时, 由 $\max\limits_{i\in N_2}m_i=\min\limits_{j\in N_1}M_j$ 和式(5) 式(7) 可知: $\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|d_j+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|d_j=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\max\limits_{i\in N_2}m_i=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\min\limits_{j\in N_1}M_j\leqslant\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|M_j=r=|b_{ii}|$.

2) 当 $\forall i\in N_2$ 时, $|b_{ii}|=|a_{ii}|\max\limits_{i\in N_2}m_i$, $\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|d_j+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|d_j=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}+\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\max\limits_{i\in N_2}m_i$, 则 $|b_{ii}|-\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|=|a_{ii}|\max\limits_{i\in N_2}m_i-\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\max\limits_{i\in N_2}m_i=\Big(|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\Big)\max\limits_{i\in N_2}m_i-\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}\geqslant\Big(|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\Big)m_i-\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}$ 由 m_i 的定义可知 $\Big(|a_{ii}|-\sum\limits_{\substack{j\in N_2\\ j\neq i}}|a_{ij}|\Big)m_i=\sum\limits_{j\in N_1}|a_{ij}|\dfrac{r}{|a_{ii}|}$, 所以 $|b_{ii}|-\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|\geqslant 0$, 即 $|b_{ii}|=\sum\limits_{j\neq i}|b_{ij}|$.

综上所述,对任意的 $i\in N$, $|b_{ii}|\geqslant\sum\limits_{\substack{j\in N\\ j\neq i}}|b_{ij}|$; 进一步指出 $|b_{ii}|\geqslant\sum\limits_{\substack{j\in N\\ j\neq i}}|b_{ij}|$, $\forall i\in N$ 中至少有一严格不等式成立. 否则 $|b_{ii}|=\sum\limits_{\substack{j\in N\\ j\neq i}}|b_{ij}|$, $\forall i\in N$, 当 $\forall i\in N_2$ 时, 必有 $m_i=\max\limits_{j\in N_2}m_j$; 当 $\forall i\in N_1$ 时, 必有 $M_j=\min\limits_{j\in N_1}M_j=\max\limits_{i\in N_2}m_i$, 从而 $M_j=m_i$, $\forall j\in N_1$, $\forall i\in N_2$, 那么式(4) 皆为等式, 与已知矛盾, 所以 B 是不可约对角占优矩阵, 因而 A 是非奇异 H- 矩阵.

2　数值算例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0.5 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ 2 & 1.5 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ 4 & 2 & 9 & 5\\ 3 & 1 & 5 & 8\end{pmatrix}, N_1=\{1,2\}, N_2=\{3,4\}$$

因为 $r=\dfrac{3}{2}$, 则由:

$$\left[r-(|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{21}|+|a_{22}|)\frac{r}{|a_{33}|}\right](|a_{33}|-|a_{34}|)=\left[\frac{3}{2}-5\times\frac{\frac{3}{2}}{9}\right]\times 4=$$

$$\frac{8}{3}>\frac{3}{4}\times 6\times\frac{\frac{3}{2}}{9}=\frac{3}{4}=(|a_{13}|+|a_{14}|+|a_{23}|+|a_{24}|)(|a_{31}|+|a_{32}|)\frac{r}{|a_{33}|}$$

$$\frac{3}{2}\left[r-(|a_{11}|+|a_{12}|+|a_{21}|+|a_{22}|)\frac{r}{|a_{44}|}\right](|a_{44}|-|a_{43}|)=\left[\frac{3}{2}-5\times\frac{\frac{3}{2}}{8}\right]\times 3=$$

$$\frac{27}{16}>\frac{3}{4}\times 4\times\frac{\frac{3}{2}}{8}=\frac{9}{16}=(|a_{13}|+|a_{14}|+|a_{23}|+|a_{24}|)(|a_{41}|+|a_{42}|)\frac{r}{|a_{44}|}$$

(下转第 346 页)