

文章编号:1672-058X(2011)03-0289-04

# 基于应力和基频的渐进优化法

胡瑞姣

(重庆大学 机械工程学院 重庆 400044)

**摘要:**根据工程实际要求,利用有限元法对结构进行静、模态分析。为了得到一质量减小、应力均匀、动态性能更优的结构,基于应力和频率删除准则,建立了一种改进的基于应力和基频的渐进结构优化算法。算法采用了灵敏度再分配法,有效抑制了优化中的棋盘格,提高了优化效果。每迭代步单元删除后,进行孤点以及单铰支检查技术,并删除,一定程度上避免了局部模态的产生。提供的算例表明了方法的简单、有效,是 ESO 方法在工程应用的又一次尝试,具有一定的使用价值。

**关键词:**渐进结构优化;应力;基频

**中图分类号:**TU502

**文献标志码:**A

渐进结构优化方法(evolutionary structural optimization, ESO)<sup>[1]</sup>是 1993 年由 Xie 和 Steven 提出的,其基本思想是通过逐渐将无效或低效的材料删除,剩下的结构将趋于优化。在优化迭代中,方法采用固定的有限元网格,对存在的材料单元设其材料数编号为 1,而对不存在的材料单元设其材料数编号为 0。方法设计变量少,每个单元只需一个标明单元存在与否的状态变量。当计算结构刚度矩阵等特性时,不计材料数编号为 0 的单元特性。因此随着大量“死”单元的去掉,结构特性参数分析和重分析的方程求解数大大减少。由于概念上的简洁性和应用上的有效性,ESO 具有较大的理论价值和很好的工程应用前景,目前已应用于应力、位移、刚度、频率、稳定性和临界应力约束问题的优化。关于 ESO 方法的研究可参见文献[2-8],由此可见 ESO 的理论不断得到完善。

ESO 进行拓扑优化的关键在于用一个合适的准则来评价每个单元对结构特定行为的贡献大小,以删除一些贡献较小的单元。而以前的准则研究大都是基于静力问题的,然而结构的动态特性又是影响产品性能的关键因素之一。为了使 ESO 获得更具有工程应用价值的优化结果,在优化过程中需同时考虑应力和频率方面的约束。又由于低阶模态特性基本决定了产品的动态性能,因此利用 ESO 进行基于应力和频率约束的拓扑优化,即从满足应力约束和频率约束的结构中系统地删除低效材料,得到重量最小化的拓扑优化。

## 1 ESO 应力优化

ESO 首先是针对应力优化而提出的,应力优化的准则为:逐渐去掉结构中的低应力材料,是剩下的结构更有效地承担载荷,从而应力分布更加均匀。所以将单元的 VonMises 应力  $\sigma_e^{vm}$  与整个结构的最大 VonMises 应力进行比较,便可确定每个单元的应力水平。

在每一次有限元分析完成后,从模型中删除满足下列条件的所有单元

$$\frac{\sigma_e^{vm}}{\sigma_{max}^{vm}} < RR_i \quad (1)$$

式中  $RR_i$  是当前删除率(RR),通过使用相同的  $RR_i$  值,重复执行有限元分析与单元删除,直至达到稳定状态,也即是在当前步已不能进一步删除材料。这时在材料删除率中引入进化率(ER)

收稿日期:2010-11-18;修回日期:2010-12-20.

作者简介:胡瑞姣(1985-),女,山东济宁人,硕士研究生,从事机械设计及理论研究.

$$RR_{j+1} = RR_j + ER \quad (2)$$

通过增加删除率,再一次进行有限元分析与单元删除,直至达到一个新的稳定状态。如此的一个进化过程继续至获得期望的最佳结构。

## 2 ESO 频率优化

为了确定结构修改的最好位置,需要进行灵敏度分析来确定须删除的单元。对有限元动平衡方程微分,可得到第  $i$  单元的特征值灵敏度。

在有限元分析中,结构动特性的一般特征值问题为

$$([K] - \omega_i^2 [M]) \{\varphi_i\} = \{0\} \quad (3)$$

其中:  $[K]$  为总刚度矩阵;  $[M]$  为质量矩阵;  $\omega_i$  为第  $i$  阶固有频率;  $\{\varphi_i\}$  为相应于  $\omega_i$  的特征矢量。固有频率  $\omega_i$  以及相对应的特征矢量  $\{\varphi_i\}$  通过瑞利商相互关联

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \quad (4)$$

其中模态刚度  $k_i$  和模态质量  $m_i$  定义为

$$k_i = \{\varphi_i\}^T [K] \{\varphi_i\} \quad (5)$$

$$m_i = \{\varphi_i\}^T [M] \{\varphi_i\} \quad (6)$$

假定在当前结构中删除单元  $j$ ,对(2)式微分得到由于删除该单元引起的第  $i$  阶频率变化量

$$\Delta(\omega_i^2) = \frac{\Delta k_i}{\Delta m_i} - \frac{k_i \Delta m_i}{m_i^2} = \frac{1}{m_i} (\Delta k_i - \omega_i^2 \Delta m_i) \quad (7)$$

假设单元增减前后,特征矢量  $\{\varphi_i\}$  不变,其中  $\{\varphi_i^e\}$  是  $j$  单元的振型,因此

$$\Delta k_i \approx -\{\varphi_i^e\}^T [k^e] \{\varphi_i^e\} \quad (8)$$

$$\Delta m_i \approx -\{\varphi_i^e\}^T [m^e] \{\varphi_i^e\} \quad (9)$$

其中  $[k^e]$  和  $[m^e]$  分别是删除单元  $j$  的单元刚度矩阵和单元质量矩阵,将式(8)和(9)带入式(7)

$$\Delta(\omega_i^2) \approx \frac{1}{m_i} \{\varphi_i^e\}^T (\omega_i^2 [m^e] - [k^e]) \{\varphi_i^e\} \quad (10)$$

在模态分析中,常将特征向量  $\{\varphi_i^e\}$  相对于质量矩阵  $[M]$  正则化,使得模态质量  $m_i$  等于 1,这种情况下灵敏度计算公式可简化为

$$\alpha_i^j = \{\varphi_i^e\}^T (\omega_i^2 [m^e] - [k^e]) \{\varphi_i^e\} \quad (11)$$

由此可发现,只要在有限元分析之后得到特征参数,敏度值就可以在单元层次上求得。

频率灵敏度是在假设删除单元前后振型不发生改变的基础上推到得到的,具有一定的数值不稳定性,以至于棋盘格问题严重,为了抑制棋盘格,采用灵敏度再分配技术。即将单元灵敏度分配到节点,节点  $l$  的灵敏度等于相关单元灵敏度的平均,即

$$I_\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i^j}{n} \quad (\text{其中 } n \text{ 为节点 } l \text{ 相关联单元数}) \quad (12)$$

再将节点灵敏度返回单元,也就是说单元的再分配灵敏度为本单元节点灵敏度的平均值。

频率优化有最大化或最小化指定的某阶或某几节频率、最大化指定两频率间隔等问题。要增大某阶固有频率,优化迭代时只需删除灵敏度较大的单元即可,相反,欲减小某阶固有频率删除灵敏度值为负的较小单元。

## 3 ESO 应力和频率优化

### 3.1 考虑应力和频率的结构拓扑优化模型

在结构拓扑优化中,基于应力和基频约束的优化模型建立如下:

$$\text{求 } B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_N\}$$

$$\text{Min } W = \sum_{i=1}^N b_i w_i$$

s. t.

$$\sigma_{\max} < \sigma^*$$

$$-f \leq -f^* \quad (f \leq f^* \text{ 减小基频})$$

$$b_i = \{0, 1\} \quad (i = 1, \dots, N)$$

式中  $b_i$  为设计变量,取 0 和 1(0 表示删除单元, 1 表示保留单元)。W 为结构总重量,  $w_i$  是第  $i$  个单元的重量,  $\sigma_{\max}$  是最大应力,  $\sigma^*$ 、 $f^*$  分别是应力、频率约束值。

### 3.2 优化步骤

算法的具体实现步骤:

(1) 定义结构能占有的最大允许物理区域, 并作为初始设计结构; 用有限元精细离散网格, 给定基于应力的初始删除率  $RR$  和进化率  $ER$ , 基于频率的删除率  $RE$ 。

(2) 指定载荷、约束、单元特性等。

(3) 静力分析, 按照式(1) 选取单元集合  $N$ , 集合  $N$  中单元个数为  $n$ 。

(4) 模态分析, 计算集合  $N$  中每个单元的再分配灵敏度  $\alpha_i$ , 其中  $\alpha_i > 0$  的单元个数为  $m$ 。

(5) 基于频率删除单元的个数为  $f$ ,  $f = d * RE$  (其中  $d$  为当前迭代步活的单元), 比较  $n$ 、 $m$  以及  $f$  的大小, 取 3 个当中最小值作为本次迭代要删除的单元个数  $g$ 。

(6) 从集合  $N$  中删除  $g$  个频率灵敏度大于 0 的单元。

(7) 孤点以及单铰支检验, 并删除。

(8) 如果没有满足式(1) 的单元, 结构拓扑达到一个稳态, 按式(2) 增加基于应力的删除率。

(9) 重复 3-8, 直到满足某一准则限。

如果要减小基频, 只需将(4) 改为: 模态分析, 按照式(11) 计算集合  $N$  中每个单元的  $\alpha_i$ , 其中  $\alpha_i < 0$  的单元个数为  $m$ 。与基于应力的 ESO 相比, 第 4、5、6 步是对基于应力的 ESO 的一个修正; 与基于频率的 ESO 相比, 第 3、5 步是对基于应力的 ESO 的一个修正。

## 4 数值算例

### 4.1 对角固支的矩形板的拓扑优化设计

矩形板处于平面应力状态, 一组对角点固定, 底边中点竖向载荷  $F = 100 \text{ N}$ , 厚度  $t = 0.01 \text{ m}$ , 弹性模量  $E = 70 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ ,  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ 。初始设计区域为  $0.15 \times 0.1 \text{ m}$  的矩形区域, 模型划分为  $45 \times 30$  个四边形有限元网格单元。

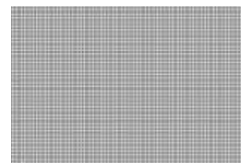


图 1 矩形板拓扑优化计算模型

设定初始基于应力的单元删除率  $RR = 0.01$ 、单元进化率  $ER = 0.01$ , 基于频率的删除率  $RE = 0.01$  (迭代过程中保持不变)。进化结构优化进程结果见图 2 所示:

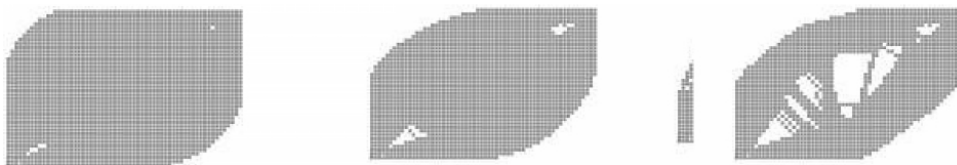


图 2 矩形板进化过程

图 2 是相应 6 个删除率  $RR_i$  下的稳态结构, 经过 15 个稳态迭代, 当  $RR = 0.15$  时最大应力由最初的  $28185 \text{ Pa}$  增加到  $29485 \text{ Pa}$ , 频率由  $2441 \text{ Hz}$  增加到  $3239 \text{ Hz}$ , 增加了 33%。最优拓扑结构与基于频率的 ESO<sup>[6]</sup> 拓扑结构有微小的差异, 但鉴于算法的是以应力和频率为约束的 ESO, 一定程度上说明了算法的合理性。但方法只允许删除单元, 随着剩余单元的减少得到结构平滑性越来越不好, 并且边界粗糙不均匀, 有明

显的棋盘格。

#### 4.2 两端固支的矩形板拓扑优化设计

矩形板结构初始设计的尺寸为  $2H \times H$  ( $H = 50 \text{ mm}$ ), 弹性模量  $E = 100 \text{ GPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 板厚  $t = 1 \text{ mm}$ ,  $\rho = 7\,000 \text{ kg/m}^3$ , 竖向荷载  $F = 1 \text{ N}$ 。有限元分析选用四边形单元将几何模型分成  $50 \times 25$  个正方形固定网格(图 3)。

设定初始基于应力的单元删除率  $RR = 0.01$ 、单元进化率  $ER = 0.01$ , 基于频率的删除率  $RE = 0.01$ (迭代过程中保持不变)。进化结构优化进程结果如图 4 所示:

图 4 给出了 6 个不同迭代步的拓扑结构。在优化前期与基于应力的 ESO 拓扑结构没有区别, 随着单元的减小, 在中后期与基于应力的 ESO 拓



图 3 矩形板拓扑优化计算模型

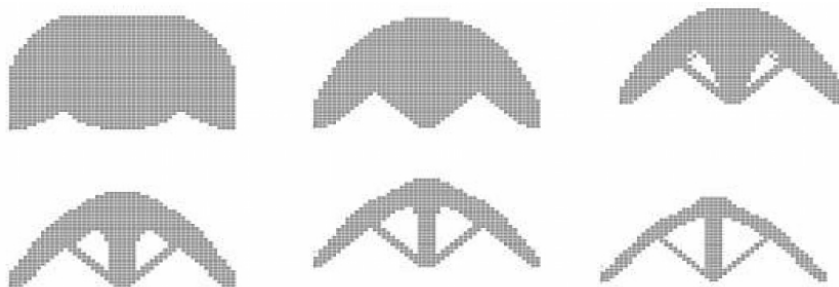


图 4 矩形板拓扑进程

扑结构呈现一定的差异。算例中, 最大应力由最初的  $327\,497 \text{ Pa}$  增加到  $459\,547 \text{ Pa}$ , 频率由  $4\,710$  降低到  $1\,559$ , 减少了  $67\%$ 。算法的最大应力比基于应力的 ESO<sup>[8]</sup> 要大, 不如基于应力的 ESO 最优拓扑结构应力均匀, 更说明了算法是静态性能优化和动态性能优化的一种平衡, 作为一种启发式算法, 可根据工程需要, 选择合适的拓扑结构。

## 5 结 论

综合考虑了影响结构性能的关键因素, 提出一种以应力和第一阶固有频率为约束的 ESO, 算例说明了拓扑优化时算法一定程度上平衡了静态性能和动态性能, 使静态性能和动态性能同时得到优化。但由于算法中被删除的单元在后续迭代中不能恢复的缺点, 以及频率灵敏度基于振型不变的基础上推到计算的, 算法还需继续研究改进。

### 参考文献:

- [1] XIE Y M, STEVEN O P. A simple evolutionary procedure for structural optimization [J]. *Comput. Struct.* 1993, (49): 885-896
- [2] TANSKANEN P. The evolutionary structural optimization method: Theoretical aspects [J]. *Comput Methods Appl Mech Engrg*, 2002, 24(6): 548-552
- [3] XIE Y M, STEVEN G P. A simple approach to structural frequency optimization [J]. *Comput Struct*, 1994, 53(6): 148-152
- [4] CHU D N, XIE Y M, HIRA A, et al. On various aspects of evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraint [J]. *Finite Elements Anal*, 1997, 24(2): 197-201
- [5] 林家浩. 结构动力优化设计发展综述 [J]. *力学进展*, 1983, 13(4): 423-431
- [6] 杨振兴, 荣见华, 傅建林. 三维结构的频率拓扑优化设计 [J]. *振动与冲击*, 2006, 25(3): 44-47
- [7] 荣见华, 郑健龙, 徐飞鸿. 结构动力修改及优化设计 [M]. 北京: 人民教育出版社, 2001
- [8] 孙圣权. 基于 ESO 的液压机下横梁结构拓扑优化及双向进化结构优化方法研究 [D]. 重庆: 重庆大学, 2008

(下转第 300 页)

## Research into the Status Quo of Chongqing's Ecological Carrying Capacity Based on Ecological Footprint Model

ZHANG Xing-mei<sup>1 2</sup>, YANG Qing-wei<sup>2</sup>

(1. Science and Technology Learning-guided Department, Learning-guided Center,  
Chongqing Radio and Television University, Chongqing 400052, China;  
2. Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

**Abstract:** Ecological footprint theory, as an important tool of quantitative assessment of regional sustainable development, is currently accepted by majority of experts and scholars. Based on related statistical data, this paper analyzes the status quo of Chongqing's ecological carrying capacity. The results show that the ecological footprint of this region is 2.45282 hm<sup>2</sup>, that the ecological carrying capacity of this region is only 0.270527 hm<sup>2</sup> and that ecological deficit of this region is 2.177824 hm<sup>2</sup>. On the basis of the reasons, the feasible measures such as controlling population growth, improving consumption structure, developing old industrial base, reducing environment pollution and so on are proposed to mitigate ecological pressure and to promote ecological carrying capacity.

**Key words:** Chongqing; ecological footprint; ecological carrying capacity; sustainable development

责任编辑:田静

(上接第 292 页)

## Evolutionary Structural Optimization Based on Stress and Fundamental Natural Frequency

HU Rui-jiao

(School of Mechanical Engineering, Chongqing University, Chongqing 400044, China)

**Abstract:** According to real requirements of engineering, finite element method is used to analyze the static and modal characteristics of the structure. In order to obtain a structure with reduced quality, stress uniformity and better dynamic performance, and based on stress and frequency deletion standard, an improved Evolutionary Structural Optimization based on stress and fundamental natural frequency was set up. This algorithm uses sensitivity redistribution, effectively suppresses checkerboard pattern in optimization and improves the optimization effect. After iterative element is removed, then singular elements and single-hinged components are detected and removed, localized modes are avoided to some extent. The examples demonstrate that this method is simple and effective, is another attempt of ESO in engineering application and has certain value.

**Key words:** Evolutionary Structural Optimization; stress; fundamental natural frequency

责任编辑:代小红  
校 对:田静