文章编号:1672－058X(2011)03－0233－03

关于第一、第二类完全椭圆积分的一些估值

唐　艳

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:利用凸函数的性质并通过积分公式给出一些积分不等式,对两类完全椭圆积分的值进行了估计,并特别讨论了一个特殊椭圆积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$ 的上界和下界,改进了有关文献的结果.

关键词:椭圆积分;估值;凸函数;有界

中图分类号:O313,O172.2　　**文献标志码**:A

完全椭圆积分在力学、电磁学等学科中的应用广泛,因此对椭圆积分的讨论特别是其值的估计,显得尤为重要[1,2]. 此处将对两第一、第二类完全椭圆积分进行估值讨论.

第一类、第二类椭圆积分如下式给出:

$$E(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-t^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{1}$$

$$F(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-t^2\sin^2\theta}} \tag{2}$$

当然,式(1)(2)也可以表示为:

$$E(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \tag{3}$$

$$F(a,b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}} \tag{4}$$

对于积分(2)(4),在 $|t|<1$ 时,因为 $\theta\to\frac{\pi}{2}$ 时,被积函数是 $\frac{1}{2}$ 阶的无穷大,因此他们是收敛的. 若 $b>a>0$,则 $E(a,b)=bE\left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}\right)$,$E(\sqrt{1-t^2},1)=E(t)$. 同理,有 $F(a,b)=\frac{1}{b}F\left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{b}\right)^2}\right)$,$F(\sqrt{1-t^2},1)=F(t)$.

1　几个结果及证明

界定 $F(t)$ 和 $E(a,b)$ 的值. 首先给出所获得的几个结果.

定理 1　若 $0<t<1$,有 $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t}-1\leqslant F(t)\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\arctan t+\ln\frac{(1+t)}{1-t}\right)-2.$

定理 2　若 $0<a<b$,有 $\frac{(a+b)\pi}{4}\leqslant E(a,b)\leqslant\pi\left(\frac{b}{3}+\frac{a}{6}\right).$

收稿日期:2010－09－10;修回日期:2010－10－10.

作者简介:唐艳(1979－),女,四川泸州人,讲师,从事应用数学研究.

定理3 若$0<b<a$,有$\left|\frac{2}{\pi}E(a,b)-\frac{a+b}{2}\right|\leqslant\frac{1}{\pi}\left(1-\frac{2}{\pi}\right)(a-b)$.

在给出这些证明之前,先给出一些引理.

引理1 若$f(x)$在$[0,1]$上连续,则$\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

证明 利用换元法$\theta=\frac{\pi}{2}-t$,即可得到该结论.

引理2 $|t|<1$时,$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{2k+1}=\begin{cases}\frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$.

引理3 $|t|<1$时,$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{4k+1}=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\arctan t+\ln\frac{1+t}{1-t}\right) & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$.

证明 利用一致收敛幂级数的基本性质,即可得引理2,3.

引理4[3] 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续,在(a,b)上可微.若$f(x)$不恒为常数,且在(a,b)内有$m\leqslant f'(x)\leqslant M$,那么$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\frac{f(a)+f(b)}{2}\right|\leqslant\frac{[M-L_0][L_0-m]}{2(M-m)}$,其中$L_0=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

下面给出以上几个结果的证明.

定理1的证明 由于$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$,$-1<x<1$.令$x=-t^2\sin^2\theta$,$\alpha=-\frac{1}{2}$,则有$(1-t^2\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}}=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{(k!)^2}t^{2k}\sin^{2k}\theta$.所以:

$$F(t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-t^2\sin^2\theta}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}}\frac{(2k)!}{(k!)^2}t^{2k}\sin^{2k}\theta\right]\mathrm{d}\theta=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{4^{2k}}(C_{2k}^k)^2$$

又因为$\frac{4^k}{\sqrt{\pi\left(k+\frac{1}{2}\right)}}<C_{2k}^k<\frac{4^k}{\sqrt{\pi\left(k+\frac{1}{4}\right)}}$,根据引理3,4可知:$\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2t}\ln\frac{1+t}{1-t}-1\leqslant F(t)\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{1}{\sqrt{t}}\left(\arctan t+\ln\frac{(1+t)}{1-t}\right)-2$.

定理2的证明 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$中考察函数:$\sqrt{1+t^2\cos^2\theta}-\sqrt{1+t^2}+\frac{4}{\pi^2}(\sqrt{1+t^2}-1)\theta^2-\alpha\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$的单调性以及凸性,可得:

$$\sqrt{1+t^2}-\frac{4}{\pi^2}(\sqrt{1+t^2}-1)\theta^2-\frac{4(\sqrt{1+t^2}-1)}{\pi^2}\theta\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\leqslant$$
$$\sqrt{1+t^2\cos^2\theta}\leqslant\sqrt{1+t^2}-\frac{4}{\pi^2}(\sqrt{1+t^2}-1)\theta^2 \qquad (5)$$

令$t^2+1=\frac{b^2}{a^2}$,则:

$$\sqrt{1+t^2\cos^2\theta}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta} \qquad (6)$$

根据引理1以及式(6),可得:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{b^2\sin^2\theta+a^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta,E(a,b)=a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+t^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上,对上面不等式(5)两边积分,则得$\frac{a+b}{4}\pi\leqslant E(a,b)\leqslant\frac{\pi}{3}b+\frac{\pi}{6}a$.

定理3的证明 令$f(\theta)=\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}$,则$f'(\theta)=\frac{(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}$,$f''(\theta)=$

$\dfrac{(a^2-b^2)\cos^4\theta(b^2-a^2\tan^4\theta)}{(a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta)^{\frac{3}{2}}}$. 令 $f''(\theta)=0$,则得到 $\theta=\arctan\sqrt{\dfrac{b}{a}}$,所以 $f'(\theta)$ 在唯一点 $\theta=\arctan\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ 处获得最大值 $M=a-b$. 而 $\lim\limits_{\theta\to 0^+}f'(\theta)=\lim\limits_{\theta\to 0^+}\dfrac{(a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}}=\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}^-}f'(\theta)=0$,故 $f'(\theta)$ 的最小值 $m=0$. 由前面的引理 1 可知 $\left|\dfrac{2}{\pi}E(a,b)-\dfrac{a+b}{2}\right|\leqslant\dfrac{1}{\pi}\left(1-\dfrac{2}{\pi}\right)(a-b)$.

2 几点注记

1) 若 $b>a$,从积分中值定理[1]可得 $\dfrac{\pi}{2}a\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}b$,此处结果的两端均比之要强.

2) 文献[2]中获得不等式 $\dfrac{\pi}{6}(2a+b)\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2\cos^2\theta+b^2\sin^2\theta}\,d\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}(a+2b)$,只要 $b>a$ 时,定理 2 所获得结果比该不等式的左边更强.

3) 在文献[5]中讨论了椭圆了积分 $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$,并得到下界估值 $\dfrac{3}{10}+\dfrac{27}{160}\sqrt{2}$. 根据 $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}>\dfrac{1}{2}\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}}=\dfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{d\theta}{\sqrt{1-\dfrac{1}{4}\sin^2\theta}}$,并利用定理 1 的结论,可得 $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}>\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\ln3-\dfrac{1}{2}$,该结果比文献[3]的结果更强.

参考文献:

[1] 张鸿林,周民强. 微积分和数学分析引论[M]. 北京: 科学出版社,2002

[2] QI F, ZHANG H. Inequalities of the complete elliptic integrals[J]. Tamkang J Math,1995(3):165-169

[3] CERONE P, DRAGOMIR S S. Lobatto, type quadrature rules for functions with bounded derivative[J]. Math Inequal Appl, 2003(2):197-209

[4] 张凤芝,刘证. 一个椭圆积分的估值[J]. 鞍山钢铁学院学报,2005,24(6):453-456

[5] GUO B N, FENG Q. Some bounds for the complete elliptic integrals of the first and the second kinds[J]. math CA, 2009, 18(5):2787-2790

Some Appraisements on Complete Elliptic Integral of the First and the Second Kinds

TANG Yan

(School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: By using the characteristics of convex function and integral formula, some integral inequalities are given, the value of complete elliptic integral of the first kind and the second kind is estimated, the upper and lower bound of a special elliptic integral $\int_0^1\dfrac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}}$ is discussed and the related literature results are improved.

Key words: elliptic integral; appraisement; convex function; bounded

责任编辑:李翠薇