文章编号:1672 - 058X(2011)03 - 0225 - 04

非线性系统的全局有限时间内稳定*

李保平[1],姜礼敏[2]
(1. 安徽大学 数学与科学学院,合肥 230039;2. 河南师范大学 数学与信息科学学院,河南 新乡 453000)

摘 要:研究了一类不确定非线性系统的输出反馈全局有限时间稳定问题,该系统的线性化是不可测的. 通过加幂积分仪技术和特殊的观测器,精确地设计了输出反馈控制器,实现了系统的有限时间内的稳定.

关键词:不确定非线性系统;有限时间稳定;非光滑输出反馈控制
中图分类号:O231.2 文献标志码:A

1 系统的描述

考虑如下不确定非线性系统的全局有限时间稳定性问题:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^r + \varphi_1(t,x,u) \\ \dot{x}_2 = d(t,x_1,x_2,u)\,u + \varphi_2(t,x,u) \\ y(t) = x_1(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varphi_i, i=1,2$,是 C^0 函数,且 $\varphi_i(0)=0$,$0<r<1$ 是奇整数率.

在非线性控制领域,全局输出反馈稳定是最基本最具挑战性的问题之一,很多学者致力于输出反馈问题并取得了成果. 在文献[1]中,由于线性化的不可观测性,不能使用传统的 Luenberger 观测器. 后来基于加幂积分仪技术的使用,文献[2][3]设计了一个全局光滑状态反馈控制律. 为了解决不可观测线性化问题,文献[4][5]用一个新的观测器来估计不可测状态.

非线性系统有限时间输出反馈稳定意义重大,它使得收敛的速度更快,而且对不确定的系统具有很好的鲁棒性[1];与状态反馈[6]相比,有限时间输出反馈稳定的研究成果相对较少;在文献[7]中,平面系统引入了一维连续观测器. 有不少文献研究了状态指数为 p 的系统,下面来考虑系统(1)的有限时间输出反馈问题.

2 问题的提出与引理

此处的目的是找出动态输出反馈控制器,形如:

$$\begin{cases} \dot{z} = \eta(z,y) \\ u = u(z,y) \end{cases} \qquad z \in R \tag{2}$$

使得闭环系统(1)和(2)是全局稳定的,同时所有轨迹将在有限时间内趋于原点$(x,z)=(0,0)$.

下面的类李亚普诺夫定理普遍应用于非线性系统有限时间稳定.

定理 1 对于连续系统 $\dot{x}(t)=f(x(t))$,若存在 C^1 正定函数 $V: R^n \to R$,实数 $k>0$ 和 $\alpha \in (0,1)$ 满足 $\dot{V} + kV^{\alpha}$ 是半负定的,那么原点是一个全局有限时间稳定的平衡点. 下面引入 3 个引理,这些引理是得出系统(1)

收稿日期:2010 - 11 - 03;修回日期:2010 - 12 - 10.
* 基金项目:国家自然科学基金(60675031);安徽省高等学校省级自然科学研究项目(KJ2008B093);安徽大学人才队伍建设经费.

作者简介:李保平(1985 -),男,硕士研究生,从事控制理论、S - 粗集与系统规律挖掘研究.

有限时间输出稳定的基础.

引理2 设 $0<r<1$ 是奇整数率,有 $|a^r-b^r|\leqslant 2^{1-r}|a-b|^r,\forall a\in R,b\in R$ 成立.

引理3 设 n 和 m 是两个正实数,$a\geqslant 0,b\geqslant 0,\pi\geqslant 0$ 是连续函数,对任意常数 $c\geqslant 0$ 有 $a^n b^m\pi\leqslant ca^{m+n}+\dfrac{m}{m+n}\left[\dfrac{n}{c(m+n)}\right]^{\frac{n}{m}}b^{m+n}\pi^{\frac{n+m}{m}}$.

引理4 设实数 $0<r<1$ 是奇整数率,对任意的 $0<\tau<1$ 和 t,有 $t^r+(1-t)^r+\tau^2t^{1+r}\geqslant(2^r-1)\tau^{1-r}$.

3 全局有限时间输出反馈稳定

为了使系统(1)稳定,对不确定部分给出适当假设限定.

假设1 $0<r<1$ 满足对所有的 $x_1,x_2\in R$,有:

$$\begin{cases}|\varphi_1(t,x,u)|\leqslant|x_1|^r\theta_1(x_1)\\|\varphi_2(t,x,u)|\leqslant(|x_1|^r+|x_2|^r)\theta_2(x_1)\end{cases}\tag{3}$$

其中 $\theta_1(x_1)\geqslant 0,\theta_2(x_1)\geqslant 0$ 是光滑函数.

假设2 $\mu(x_1),\nu(x_1)$ 是两个光滑函数,满足 $0<\mu(x_1)<d(t,x_1,x_2,u)<\nu(x_1)$.

在上面的假设基础上,提出主要结论:

定理2 在假设1下,有一输出反馈控制器,形如下:

$$\begin{cases}\dot{z}=\nu(x_1)u(x_1,(z+L(x_1)))-\dfrac{\partial L(x_1)}{\partial x_1}((z+L(x_1)))^r+\varphi_1(t,x,u)\\u=u(x_1,(z+L(x_1)))\end{cases}\tag{4}$$

其中 $L(x_1)$ 是 C^1 非线性函数且有 $\dfrac{\partial L(x_1)}{\partial x_1}\geqslant 0,L(0)=0$,使得闭环系统(1)-(4)是全局有限时间稳定的.

证明 为了证明这个结论,首先设计了一个有限时间状态反馈控制器,然后由于系统的不可控、不可观测性构造了一维观测器,最后通过选择观测器中的待定量来保证闭环系统的有限时间稳定.

(A)状态反馈器设计.

(i)构建李雅普诺夫函数 $V_1=\dfrac{x_1^2}{2}$,由假设1得 $\dot{V}_1\leqslant-2x_1^{1+r}+x_1(x_2^{1+r}-x_2^{*(1+r)})\leqslant-2x_1^{1+r}+x_1(x_2^{1+r}-x_2^{*(1+r)})$,虚拟控制:

$$x_2^{*r}=-x_1^r\omega(x_1),\omega(x_1)=2+\theta_1\tag{5}$$

(ii)构建李雅普诺夫函数 $V_2(x_1,x_2)=V_1(x_1)+\dfrac{1}{2}(x_2-x_2^*)^2$,对 V_2 微分得 $\dot{V}_2\leqslant-2x_1^{1+r}+x_1|x_2^r-x_2^{*r}|+(x_2^r-x_2^{*r})(\mathrm{d}u+\varphi_2-\dfrac{\partial x_2^*}{\partial x_1}(x_2^r+\varphi_1))$. 由引理1,有:

$$|x_2^r-x_2^{*r}|\leqslant 2^{1-r}|x_2-x_2^*|^r\tag{6}$$

由式(6)和假设1可以推出:$\dot{V}_2\leqslant-2x_1^{1+r}+2^{1-r}x_1|x_2-x_2^*|^r+\nu(x_1)\xi_2u+\xi_2(|x_1^r|-|x_2^r|)\vartheta(x_1)$. 光滑函数 $\vartheta(x_1)\geqslant\theta_2(x_1)+\dfrac{\partial x_2^*}{\partial x_1}(1+\theta_1(x_1))\geqslant 0$ 且 $\xi_2=x_2-x_2^*$.

因为 $|x_2^r|=|x_2-x_2^*+x_2^*|^r\leqslant|x_2-x_2^*|+|x_2^*|$,可以得到:$\dot{V}_2\leqslant-2x_1^{1+r}+2^{1-r}x_1|\xi_2|^r+v(x_1)\xi_2u+\xi_2|x_1^r|\vartheta(x_1)+|\xi_2^{r+1}|\vartheta(x_1)+\xi_2|x_1^r|\omega(x_1)\vartheta(x_1)$.

由引理2,得:$\dot{V}_2\leqslant-x_1^{1+r}+v(x_1)\xi_2u+\xi_2^{r+1}\zeta(x_1)$,取:

$$u=-\xi_2^r\frac{1+\zeta(x_1)}{\nu(x_1)}=-\xi_2^r\kappa(x_1)\tag{7}$$

$$\dot{V}_2|_{u=u(x_1,x_2)}\leqslant-x_1^{1+r}-\xi_2^{r+1}\tag{8}$$

(B)非线性观测器的设计.

建立一维补偿器如下：

$$\dot z = v(x_1)u - \frac{\alpha L(x_1)}{\alpha x_1}[(z + L(x_1))^r + \varphi_1(x_1)] \tag{9}$$

其中 $L(x_1)$ 是一非线性函数且有 $\frac{\alpha L(x_1)}{\alpha x_1} > 0$，设 $e = x_2 - L(x_1) - z$，那么：

$$\begin{aligned}\dot e &= du + \varphi_2(x_1) - (x_2^r + \varphi_1(x_1)) - v(x_1)u + \frac{\alpha L(x_1)}{\alpha x_1}[(z + L(x_1))^r + \varphi_1(x_1)] \leqslant \\ &\varphi_2(x_1) - \frac{\alpha L(x_1)}{\alpha x_1}[x_2^r - (z + L(x_1))^r]\end{aligned} \tag{10}$$

$$V_3(e) = \frac{e^2}{2}，则\ \dot V_3(e) = e\varphi_2(x_1) - e\sigma(x_1)[x_2^r + (e - x_2)^r] \tag{11}$$

其中$\frac{\alpha L(x_1)}{\alpha x_1} = \sigma(x_1) > 1$.

对式(11)应用引理 3. 当 $e \neq 0$ 时，将 $t = \frac{x_2}{e}$，$r = r$，$\tau = \sigma^{-\frac{2}{3}}$代入引理 3，得：

$$e\sigma(x_1)[x_2^r + (e - x_2)^r] + \sigma^{-1/3}x_2^{1+r} \geqslant (2^r - 1)\sigma^{1-(2/3)r}e^{1+r} \tag{12}$$

当 $e = 0$ 时，式(11)显然成立. 将式(6)(12)和引理 3 用于式(11)得到：

$$\begin{aligned}\dot V_3(e) &\leqslant e\varphi_2(x_1) + \sigma^{-\frac{1}{3}}x_2^{1+r} - (2^r - 1)\sigma^{1-\frac{2}{3}r}e^{1+r} \leqslant \\ &e\theta_2|x_1^r| + \alpha_2(x_1)e|x_1^r| + \alpha_1(x_1)e|\xi_2|^r + \sigma^{-\frac{1}{3}}c_1|\xi_2|^{1+r} + \\ &\sigma^{-\frac{1}{3}}b_1(x_1)|x_1|^{1+r} - (2^r - 1)\sigma^{1-\frac{2}{3}r}e^{1+r} \leqslant \\ &\frac{1}{3}x_1^{1+r} + b_2(x_1)e^{1+r} + \frac{1}{2}\xi_2^{1+r} + b_3(x_1)e^{1+r} + \sigma^{-\frac{1}{3}}c_1|\xi_2|^{1+r} + \\ &\sigma^{-\frac{1}{3}}b_1(x_1)|x_1|^{1+r} - (2^r - 1)\sigma^{1-\frac{2}{3}r}e^{1+r} = \\ &\left(\frac{1}{3} + \sigma^{-\frac{1}{3}}b_1(x_1)\right)x_1^{1+r} + \left(b_2(x_1) + b_3(x_1) - (2^r - 1)\sigma^{1-\frac{2}{3}r}\right)e^{1+r} + \\ &\left(\frac{1}{2} + \sigma^{-\frac{1}{3}}c_1\right)\xi_2^{1+r}\end{aligned} \tag{13}$$

$b_i(x_1)$，$i = 1,2,3$ 是光滑函数，c_1 是非负常数.

(C) $L(x_1)$ 的确定.

因为状态 x_2 是不可测的，状态反馈控制器(7)是不能直接实现的. 为了实现系统的稳定，用 $z + L(x_1)$ 代替式(7)中的 x_2，这样就有：

$$u = u(x_1, \hat x_2) = -(\hat x_2 - x_2^*)^r\kappa(x_1) = -(\xi_2 - e)^r\kappa(x_1) \tag{14}$$

在新的控制器下，式(8)变为：

$$\dot V_2|_{u=u(x_1,\hat x_2)} \leqslant -x_1^{1+r} - \xi_2^{r+1} + \frac{\partial V}{\partial x_2}(u(x_1, \hat x_2) - u(x_1, x_2)) = -x_1^{1+r} - \xi_2^{1+r} + \xi_2[\xi_2^r - (\xi_2 - e)^r] \tag{15}$$

由引理 1 和 2：

$$\dot V_2|_{u=u(x_1,\hat x_2)} \leqslant -x_1^{1+r} - \xi_2^{r+1} + 2^{1-r}\xi_2|e|^r\kappa(x_1) = -x_1^{1+r} - \xi_2^{r+1} + \frac{1}{4}\xi_2^{1+r} + b_4(x_1)|e|^{1+r} \tag{16}$$

$b_4(x_1) \geqslant 0$ 是光滑函数.

由式(13)和(16)可得：$\dot V_2|_{u=u(x_1,\hat x_2)} + \dot V_3(e) \leqslant -\left(\frac{2}{3} - \sigma^{-\frac{1}{3}}b_1(x_1)\right)x_1^{1+r} - \left((2^r - 1)\sigma^{1-\frac{2}{3}r}b_2(x_1) - b_3(x_1) - b_4(x_1)\right)e^{1+r} - \left(\frac{1}{4} - \sigma^{-\frac{1}{3}}c_1\right)\xi_2^{1+r}$，当 $\sigma(x_1)$ 满足 $\sqrt[3]{\sigma} \geqslant \max(2b_1, 12c_1, 1)$，$(2^r - 1)\sigma^{1-\frac{2}{3}r} \geqslant b_2 + b_3 + b_4 + \frac{1}{6}$，可以得到：

$$\dot{V}_2 \mid_{u=u(x_1,\hat{x}_2)} + \dot{V}_3(e) \leqslant -\frac{1}{6}(x_1^{1+r} + \xi_2^{1+r} + e^{1+r}) \tag{17}$$

因此:

$$x_1^{1+r} + \xi_2^{1+r} + e^{1+r} \geqslant (x_1^2 + \xi_2^2)^{\frac{1+r}{2}} + (e^2)^{\frac{1+r}{2}} \geqslant c_2(V_2^{\frac{1+r}{2}} + V_3^{\frac{1+r}{2}}) \geqslant c_2(V_2 + V_3)^{\frac{1+r}{2}} \tag{18}$$

$c_2 > 0$ 是正常数. 由式(17)可以得到 $\dot{V}_2 + \dot{V}_3 + \frac{c_2}{6}(\dot{V}_2 + \dot{V}_3)^{\frac{1+r}{2}} \leqslant 0$. 由定理1知,闭环系统(1)(2)和(4)是全局有限时间稳定的.

4 小 结

考虑了一类非线性系统的全局有限时间稳定问题,由于该系统的不可控、不可观测性,使得稳定问题变得复杂. 通过状态反馈与精确的一维补偿器的设计,实现了系统的有限时间输出稳定.

参考文献:

[1] XIA X, GAO W. On exponential observers for nonlinear systems [J]. Syst control Lett, 1988, 11(4): 319-325

[2] LIN W, QIAN C J. Adding one power integrator: A tool for global stabilization of high-order lower-triangular systems [J]. Syst control Lett, 2000(39): 339-351

[3] LIN W, QIAN C J. Robust regulation of a chain of power intergers perturbed by a lower-triangular vector filed [J]. Int J Robust Nonlinear Control, 2000(10): 397-421

[4] LIN W, QIAN C J. Nonsmooth output feedback stabilization of a class of genuinely nonlinear systems in the plane [J]. IEEE Trans Automat Contr, 2003(48): 1824-1829

[5] QIAN C J, LIN W. Smooth output feedback stabilization of nonlinear planar systems without controllable/observable linearization [J]. IEEE Trans Automat Contr, 2002(47): 2068-2073

[6] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Geometric homogeneity with applications to finite-time stability [J]. Math Control, Signals, Syst 2005, 17(2): 101-127

[7] QIAN C, LI J. Global finite-time stabilization by output feedback for planar systems without observer linearization [J]. IEEE Trans Autom Control, 2005, 50(6): 885-890

[8] 郑大钟. 线性系统理论 [M]. 2版. 北京: 清华大学出版社, 2005

[9] 马知恩, 周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2004

Global Finite-Time Stabilization for Nonlinear Systems

LI Bao-ping[1], JIANG Li-min[2]

(1. School of Mathematics and Sciences, Anhui University, Hefei 230039;
2. School of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Henan Xinxiang 453000, China)

Abstract: This paper studies the problem of global finite-time stabilization of output feedback of a class of uncertain nonlinear system and the linearization of this system is not observable. By extending the adding-a-power-integration technique and a special observer, an output feedback controller is accurately designed and the stabilization of this system in finite time is realized.

Key words: uncertain nonlinear system; stabilization in finite time; nonsmooth output feedback control

责任编辑:李翠薇