文章编号:1672 - 058X(2011)02 - 0191 - 04

输入与输出的中心资源分配 DEA 模型*

王 美 强
(贵州大学 管理学院,贵阳 550025)

摘 要:提出了同时考虑输入与输出的中心资源分配 DEA 模型,在最小化所有决策单元每种输入之和的同时最大化所有决策单元每种输出之和,并且所有决策单元均被投影到了效率前沿面;模型为分式规划,已化为线性规划求解;因为可以同时调整投入与产出,与已有的输入导向型或输出导向型模型相比,模型更加合理,也更符合生产实际。

关键词:DEA;资源分配;投影;输入输出
中图分类号:C934 文献标志码:A

数据包络分析(data envelopment analysis, DEA)方法与其他评价方法相比,其特点是在客观、确切地评价各决策单元(decision making unit, DMU)的相对效率时给出了各 DMU 从非 DEA 有效到 DEA 有效的改进方案——对输入与输出进行了目标设置,然而,这样的目标设置是分别进行的,只是反映了 DMU 作为个体使自身成为有效的诉求;现假设考察的 DMUs 均同属于一个组织,如高校的各个系、某家银行的各个营业点,组织的管理者考虑在对各 DMUs 进行目标设置——从经济学的角度即为资源分配时,更为合理的、现实的分配应是在考虑个体需求的基础上,由决策者从组织的角度及系统的高度上进行;基于此,文献[1]利用 DEA 建立了中心资源分配模型,该模型在保证系统每种输出不降、同时将每个 DMU 投影到效率前沿面上的前提下,最小化系统的每种输入量,运算结束后完成了资源分配。但它没能证明比分别投影时各 DMU 耗费资源之和小(然而这是合乎情理的,没有理论证明以组织形式运作就比各自为政时节约资源)。

上述资源分配模型与以前的用于资源分配 DEA 模型相比(如 Golany(1995)、Athanassopoulos(1995、1998)、Beasley(2003))至少有 3 方面的进步:模型是一个一般的模型而不是只针对某个具体的案例;模型保证了将所有 DMUs 投影到了效率前沿面上;模型很简洁。然而,模型仍然是沿着传统 DEA 模型的思想,要么输入导向要么输出导向;以输入导向为例,保持总的产出不变(与传统的 DEA 模型不同的是,它仅要求所有 DMUs 的产出之和不变,而不是每个 DMU 的产出都不能变),仅最小化投入之和,有时确实可以这样做,而且在算法上很简便,是单目标规划,但更多时侯投入与产出是同时调整的;此时该模型就无能为力了。

建立同时考虑输入与输出的中心资源分配 DEA 模型[1]。当然,算法上要复杂些,是分式规划,但经过变换可化为普通的线性规划求解。方法更加贴近生产现实。需要再次强调的是:所谓的中心资源分配即是在模型中以系统的角度完成了各个 DMU 的每种输入与输出的目标设置——投影。

1 输入导向资源分配模型

模型分为两阶段,第一阶段寻求各种输入以相同比例减小,然后第二阶段寻求任何输入的额外减小或任何输出的额外增大,他与传统 DEA 模型最基本的差别在于:(1)不是解独立的线性规划模型从而依次投影各 DMU,而是同时投影各 DMU;(2)不是单个地减少任何一个 DMU 的输入,而是减少所有 DMUS 的输入

收稿日期:2010 - 09 - 01;修回日期:2010 - 10 - 10.
* 项目基金:贵州大学引进人才科研基金资助(No. 2009020).
作者简介:王美强(1972 -),男,贵州人,副教授,博士,从事数据包络分析研究.

总和。

其模型如下,符号意义同传统DEA模型,第一阶段

$$\begin{aligned}&\operatorname{Min}\theta\\ \text{s.t.}\quad&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij}\leqslant\theta\sum_{j=1}^{n}x_{ij},\forall i\\&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj}\geqslant\sum_{r=1}^{n}y_{kr},\forall k\\&\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1,\forall r\\&\lambda_{jr}\geqslant 0,\theta\text{ 无约束}\end{aligned}\tag{1}$$

设 θ^* 为第一阶段的最优解,则模型的第二阶段为:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Max}\sum_{i=1}^{m}s_i+\sum_{k=1}^{p}t_k\\ \text{s.t.}\quad&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij}=\theta^*\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-s_i,\forall i\\&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj}=\sum_{r=1}^{n}y_{kr}+t_k,\forall k\\&\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1,\forall r\\&\lambda_{jr},s_i,t_k\geqslant 0\end{aligned}\tag{2}$$

对每个 $\mathrm{DMU_r}$,第二阶段的解向量$(\lambda_{1r}^*,\lambda_{2r}^*,\cdots,\lambda_{nr}^*)$定义了相应的投影点:

$$\hat{x}_{ir}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}^*x_{ij},\forall i$$

$$\hat{y}_{kr}=\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}^*y_{kj},\forall k$$

如此便完成了一次资源的分配。

2 同时考虑输入与输出的中心资源分配DEA模型及其求解

$$\begin{aligned}&\operatorname{Min}\eta=\frac{\theta}{\delta}\\ \text{s.t.}\quad&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij}\leqslant\theta\sum_{j=1}^{n}x_{ij},\forall i\\&\theta\leqslant 1\\&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj}\geqslant\delta\sum_{r=1}^{n}y_{kr},\forall k\\&\delta\geqslant 1\\&\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1,\forall r\\&\lambda_{jr}\geqslant 0\end{aligned}\tag{3}$$

设 θ^*,δ^* 为第一阶段的最优解,则模型的第二阶段为:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Max}\sum_{i=1}^{m}s_i+\sum_{k=1}^{p}t_k\\ \text{s.t.}\quad&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}x_{ij}=\theta^*\sum_{j=1}^{n}x_{ij}-s_i,\forall i\\&\sum_{r=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}y_{kj}=\delta^*\sum_{r=1}^{n}y_{kr}+t_k,\forall k\\&\sum_{j=1}^{n}\lambda_{jr}=1,\forall r\\&\lambda_{jr},s_i,t_k\geqslant 0\end{aligned}\tag{4}$$

对每个 $\mathrm{DMU_r}$，第二阶段的解向量（$\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \cdots, \lambda_{nr}^*$）定义了相应的投影点

$$\hat{x}_{ir} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}^* x_{ij}, \forall i \qquad (*)$$
$$\hat{y}_{kr} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr}^* y_{kj}, \forall k$$

定理 1　对于任一 $\mathrm{DMU_r}$，由上述模型（3）（4）的第二阶段确定的投影点（$\hat{x}_{1r}, \hat{x}_{2r}, \ldots, \hat{x}_{mr}, \hat{y}_{1r}, \hat{y}_{2r}, \cdots, \hat{y}_{pr}$）是 pareto 有效的。

证明　假使投影点是非技术有效的，那么用 BCC 模型就会解得一个向量（$\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \ldots, \lambda_{nr}$）满足 $\sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} = 1$，从而确定了一个新的投影点（$\bar{x}_{1r}, \bar{x}_{2r}, \cdots, \bar{x}_{mr}, \bar{y}_{1r}, \bar{y}_{2r}, \cdots, \bar{y}_{pr}$）使得：$\bar{x}_{ir} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} \leqslant \hat{\chi}_{ir}, \forall i, \bar{y}_{kr} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} \geqslant \hat{\gamma}_{kr}, \forall k$

因此至少对某一输入或输出，上述不等式是严格的，假设输入 r' 满足：$\bar{x}_{ir'} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} x_{ij} < \hat{x}_{ir'}$，则对 $\mathrm{DMU_r}$ 来说，由异于（$\lambda_{1r}^*, \lambda_{2r}^*, \ldots, \lambda_{nr}^*$）的向量（$\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \ldots, \lambda_{nr}$）确定了模型（3）（4）的一个可行解，其目标值为：

$$\sum_{i=1}^{m} s_i^* + \sum_{k=1}^{p} t_k^* + \sum_{i=1}^{m} (\hat{x}_{ir} - \bar{x}_{ir}) + \sum_{k=1}^{p} (\bar{y}_{kr} - \hat{y}_{kr}) > \sum_{i=1}^{m} s_i^* + \sum_{k=1}^{p} t_k^*$$

这产生了矛盾；同理对输出 k' 亦有 $\bar{y}_{kr} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{jr} y_{kj} > \hat{y}_{k'r}$，矛盾。证毕

为求解分式规划，通过 charnes-cooper 变换，即设 $\tau > 0$，令 $\theta = \frac{\varphi}{\tau}, \delta = \frac{1}{\tau}, \lambda_{jr} = \frac{\rho_{jr}}{\tau}$，则式（3）被化为等价的线性规划：

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Min}\ \varphi \\
\mathrm{s.t.}\quad & \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{jr} x_{ij} \leqslant \varphi \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \forall i \\
& \varphi \leqslant \tau \\
& \sum_{r=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \rho_{jr} y_{kj} \geqslant \sum_{j=1}^{n} y_{kj}, \forall k \\
& \tau \leqslant 1 \\
& \sum_{j=1}^{n} \rho_{jr} = \tau, \forall r \\
& \rho_{jr} \geqslant 0, \varphi \geqslant 0, \tau > 0
\end{aligned} \qquad (5)$$

如（5）的最优解为 $\rho_{jr}^*, \varphi^*, \tau^*$，则 $\mathrm{DMU}(X_0, Y_0)$ 的效率为 $\eta^* = \varphi^*$，且 $\lambda_{jr}^* = \frac{\rho_{jr}^*}{\tau^*}$，则由（*）可计算出投影点从而完成资源分配。

模型被应用在大学向各系分配资源中，结果验证了所建立模型的正确性（为节省篇幅，省略）。

3　结束语

在此提出的这两个 DEA 模型与文献 [1] 的两个模型具有共同的特点：（1）不是解独立的线性规划模型从而依次投影各 DMU，而是同时投影各 DMU；（2）不是单个地减少任何一个 DMU 的输入，而是减少所有 DMUS 的输入总和。但是，模型可能更符合生产实际，因为优化生产时，往往同时调整投入与产出，而如果只能调整投入（输入导向型）或只能调整产出（输出导向型）则比较难以运作。

最后要说明两点：第一，不管是文献 [1] 还是现模型，都不能证明所有 DMU 耗费的每种资源之和一定比个别投影时（如 BCC、CCR 模型）各 DMU 耗费的每种资源之和要小；第二，不能证明模型计算出的投入之和或产出之和与 [1] 的模型之间有大小关系，两者是独立的，是在的两类情形下的优化问题。

参考文献:

[1] SEBASTIAN L, GABRIER V. Centralized Resource Allocation Using data envelopment analysis [J]. Journal of Productivity analysis, 2004, 22: 143-161

[2] PASTOR J T, RUIZ T L. An enhanced DEA Russell graph efficiency measure [J]. European Journal of Operation Research [J]. 1999, 115: 596-607

[3] CHARNES A, COOPER W W. Programming with linear fractional functionals [J]. Naval Research Logistics Quarterly, 1962, 15: 333-334

[4] COOPER W W, HUANG Z M. Efficiency aggregation with Russell measures in data envelopment analysis [J]. Socio-Economics planning sciences, 2006(1): 21-28

[5] 李光金,阎洪. 测算投入—产出型技术效率的DEA方法 [J]. 系统工程理论与实践, 2002(1): 72-75

[6] 李光金,刘永清. 基于多目标规划的DEA [J]. 系统工程理论与实践, 1997(3): 16-22

[7] 吴育华,范贻昌,宋继旺. DEA模型的一般投影研究 [J]. 系统工程学报, 1996(1): 45-52

Centralized Resources Allocation DEA Model for Input and Output

WANG Mei-qiang

(School of Management, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: This paper presents a centralized resources allocation DEA model in which input/output orientation is simultaneously considered, total output production of all decision-making units is maximized while total input consumption of all decision-making units is minimized and all decision-making units are projected onto efficiency frontier. This model is fractional program and has been converted into linear program for being solved. Because this model can simultaneously adjust input and output, compared with existed input-orientated models or output-orientated models, the model described in this paper is more reasonable and more practical.

Key words: DEA; resources allocation; projection; input/output

责任编辑:代小红

校　　对:田　静